

ECUACIONES DIFERENCIALES PARA CIENCIAS E INGENIERÍAS

RAÚL REYNALDO ITO DIAZ
WILBER ANTONIO FIGUEROA QUISPE
EDGAR CALIZAYA CHURA

ECUACIONES DIFERENCIALES PARA CIENCIAS E INGENIERÍAS



RAÚL REYNALDO ITO DIAZ
WILBER ANTONIO FIGUEROA QUISPE
EDGAR CALIZAYA CHURA

¿Ecuaciones Diferenciales?

¡Pero si fácil!

Con la resolución de terminar las metas

**Las ecuaciones para
Ciencias
E
Ingenierías**

Autores

- 1. RAÚL REYNALDO ITO DIAZ**
- 2. WILBER ANTONIO FIGUEROA QUISPE**
- 3. EDGAR CALIZAYA CHURA**

Ecuaciones Diferenciales para Ciencias e Ingenierías

Autor:

RAÚL REYNALDO ITO DIAZ

WILBER ANTONIO FIGUEROA QUISPE

EDGAR CALIZAYA CHURA

Editado por: RAÚL REYNALDO ITO DIAZ

Jr. Ramon Castilla 1262 Manco Capac

sisrrid@gmail.com

Puno - Perú

Primera edición digital, marzo 2024

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca
Nacional del Perú N°2024-12641

ISBN: 978-612-03-0430-3

Libro electrónico disponible en:

<https://tubibliogo.com>

La investigación y la enseñanza en el campo de las ecuaciones diferenciales son un esfuerzo colectivo. Agradezco a toda la comunidad académica, tanto a los grandes pensadores del pasado que sentaron las bases de esta disciplina, como a los investigadores contemporáneos que continúan ampliando nuestros conocimientos. Espero que este libro contribuya a fortalecer esta comunidad y a fomentar el intercambio de ideas.

Índice

Clasificación de las ecuaciones diferenciales.....	7
Construcción de Ecuaciones Diferenciales	13
Aplicaciones Geométricas.....	18
Solución de Ecuaciones diferenciales	25
Ecuaciones diferenciales de Primer orden	31
Separación de Variables.....	33
Reducción De Ecuaciones Diferenciales A Variables Separables	51
Ecuaciones Homogéneas.....	51
Otros tipos de sustitución.....	64
Ecuaciones de la forma: $y \cdot f(x, y)dx + xg(x, y)dy = 0$	68
Ecuaciones diferenciales Exactas.....	82
Solución de ecuaciones diferenciales exactas a golpe de vista	94
Ecuaciones diferenciales Inexactas	97
Solución de ecuaciones diferenciales exactas a golpe de vista	103
Ecuaciones diferenciales Inexactas	106
Ecuaciones Diferenciales Lineales.....	114
La ecuación de Bernoulli	121
Ecuación de Riccati.....	125
Estudio de la ecuación de Riccati.....	128
Aplicación de Ecuaciones Diferenciales.....	131
Bibliografía	149

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Ecuación diferencial: Una ecuación diferencial es una expresión matemática que establece una relación entre una función desconocida, sus derivadas de diversos órdenes y una o más variables independientes. En esencia, estas ecuaciones describen cómo una cantidad varía en relación a los cambios en otras cantidades.

- **Ecuación diferencial ordinaria “E.D.O.”**, Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es aquella que involucra únicamente derivadas ordinarias de una función con respecto a una sola variable independiente. Es decir, describe la relación entre una función y sus tasas de cambio instantáneas en función de un único parámetro.

- **Ecuación diferencial parcial “E.D.P.”**, Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una expresión matemática que relaciona una función desconocida con sus derivadas parciales respecto a varias variables independientes. Es decir, describe cómo una magnitud varía en función de cambios simultáneos en múltiples parámetros.

Ejemplos.

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 2$$

$$2y' + 3y = \operatorname{sen} x$$

$$(x + y)dy + 3ydx = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 15xy + 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -k^2 z$$

Nota. Las tres primeras ecuaciones diferenciales son ordinarias ya que la única variable independiente es x en las dos siguientes son parciales ya que son derivadas con respecto a “ x ” y “ y ”.

Orden: El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que contiene una ecuación, es decir, Una ecuación diferencial

de orden superior es como un rompecabezas con más piezas, ya que requiere más condiciones iniciales para resolverlo.

$$\frac{dy}{dx} = x^{17} + 23 \quad \text{es una EDO de primer orden.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 1 \quad \text{es una EDO de segundo orden.}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^8 \quad \text{es una EDO de quinto orden.}$$

Grado: El grado de una ecuación diferencial es el exponente entero de la derivada de mayor orden.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^{17} + 23 \quad \text{es una EDO de grado 2.}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 1 \quad \text{es una EDO de grado 3.}$$

$$(y')^3 + (y'')^5 = 17 \quad \text{es una EDO de grado 5}$$

Manzanita 1.

Determine el orden y grado de la EDO.

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Por inspección la ecuación es de segundo orden y grado 2.

Manzanita 2.

Determine el orden y grado de la EDO.

$$y'' = \sqrt[5]{y + (y')^2}$$

Por inspección la ecuación es de segundo orden, basta con observar las derivadas.

El detalle es el grado para calcularlo elevamos a la “5”.

$$(y'')^5 = y + (y')^2$$

Ahora si el grado será “5”

Manzanita 3.

Determine el orden y grado de la EDO.

$$e^{y'''} + y' + y = 0$$

Por inspección la ecuación es de tercer orden, basta con observar las derivadas.

Sin embargo, no tiene orden, ya que la derivada está como exponente.

Manzanita 4.

Determine el orden y grado de la EDO.

$$y' = \sqrt[3]{3y - (y^v)^2}$$

Por inspección la ecuación es de quinto orden, basta con observar las derivadas.

El detalle es el grado para calcularlo elevamos a la “5”.

$$(y')^3 = 3y - (y^v)^2$$

Ahora si el grado será “2”

Ahora reemplazamos en la ecuación original

$$y = \left(\frac{y' - 4}{2x} \right) x^2 + 4x \Rightarrow 2y = y'x - 4x + 8x$$

$$2y = y'x + 4x \quad \textbf{Rpta.}$$

Linealidad:

La ecuación diferencial será lineal si es de la forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Una ecuación diferencial es lineal si puede expresarse como una combinación lineal de la función incógnita y sus derivadas de diversos órdenes. Es decir, cada término de la ecuación es proporcional a la función desconocida o a una de sus derivadas, sin que aparezcan productos o potencias superiores a uno.

Propiedades:

- La variable dependiente “y” y todas sus respectivas derivadas tienen exponente 1, es decir son de primer grado.

- Los coeficientes solo dependen de la variable independiente “x” o son constantes (Números).

Si no cumple al menos una de esas propiedades no es lineal.

Manzanita 5

Determine si la ecuación diferencial es lineal:

$$\frac{dy}{dx} = 3\text{sen}(x)$$

Por inspección si es lineal.

Manzanita 6

Determine si la ecuación diferencial es lineal:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - 8x + \frac{\partial y}{\partial s}$$

Por inspección si es lineal.

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

A continuación, se escriben distintas ecuaciones diferenciales entre ordinarias y parciales, indique el tipo, su orden, grado y si es lineal.

1. $-x^2 y'' + 2xy' = -y$

2. $-\frac{\partial U}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y}$

3. $-4y y'' - x^3 y = \text{sen} x$

4. $-x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 - 9)y = 0$

5. $-y + y' = \frac{e^x}{y}$

6. $-\cos(y') = y$

7. $-(y^v)^3 - y''' + y'' - y^2 = 0$

8. $-3 \frac{dy}{dx} - 8x\sqrt{y} = 0$ *no lineal de primer orden*

9. $-5y y'' - y' = 8 - x$ *no lineal de segundo orden*

10. $-y''' - xy'' + y' = \frac{1}{x}$ *no lineal de tercer orden*

11. $-4dy - ydx = 0$

$$12. -\frac{d^2y}{dx^2} - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 4y + x^2$$

$$13. -\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$14. -(D_x y)^3 = 3x^3 + 8$$

$$15. -\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$16. -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sqrt[3]{\frac{\partial V}{\partial y}}$$

$$17. -K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$18. -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Solución a las preguntas Propuestas

Núm.	Tipo	Orden	Grado	Variable Dependiente	Variable Independiente	Lineal
1	Ordinaria	2	1	y	x	Si
2	Parcial	2	1	U	x, y, t	No
3	Ordinaria	2	1	y	x	No
4	Ordinaria	2	1	y	x	Si
5	Ordinaria	1	1	y	x	No
6	Ordinaria	1	$\dot{z}$?	y	x	No
7	Ordinaria	5	3	y	x	Si
8	Ordinaria	1	1	y	x	No
9	Ordinaria	2	1	y	x	No
10	Ordinaria	3	1	y	x	No
11	Ordinaria	1	1	"x" o "y"	"x" o "y"	Si
12	Ordinaria	2	1	y	x	Si
13	Ordinaria	1	1	y	x	Si
14	Ordinaria	1	3	y	x	Si
15	Parcial	2	1	T	x, y, z	No
16	Parcial	2	3	V	x, y	No
17	Parcial	2	1	u	x, y	No
18	Parcial	2	1	T	x, t	No

Construcción de Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial se puede construir a partir de una curva (ecuación o primitiva), por ello bastara tener una primitiva para tener una E.D.O es decir la modelización matemática mediante ecuaciones diferenciales permite simular, analizar y predecir el comportamiento de sistemas complejos. Es una herramienta fundamental en diversas disciplinas científicas e ingenieriles a modo de introducción iniciaremos con ecuaciones.

Fresita 1.

Determine la ecuación diferencial de: $y = 3x + C$ donde C es un numero.

Solución. Basta con derivar la expresión.

$$y' = 3$$

Fresita 2.

Determine la ecuación diferencial de:

$y = Ax^2 + 4x$ donde A es un número.

Solución. Basta con derivar la expresión.

$$y' = 2Ax + 4 \Rightarrow 2Ax = y' - 4 \Rightarrow A = \frac{y' - 4}{2x}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación original

$$y = \left(\frac{y' - 4}{2x} \right) x^2 + 4x \Rightarrow 2y = y'x - 4x + 8x$$

$$2y = y'x + 4x \quad \textbf{Rpta.}$$

Fresita 3.

Determine la ecuación diferencial de:

$y = Ax^2 + Bx$ donde A y B son números.

Solución. Como son dos constantes “A y B” derivaremos 2 veces.

$$y' = 2Ax + B \quad \dots (\alpha)$$

$$y'' = 2A \quad \dots (\beta) \Rightarrow A = \frac{y''}{2} \quad \dots (\gamma)$$

Reemplazamos (β) en (α)

$$y' = y''x + B \Rightarrow B = y' - y''x \dots (\delta)$$

Reemplazamos (γ) y (δ) en la ecuación original.

$$y = \left(\frac{y''}{2}\right)x^2 + (y' - y''x)x$$

$$2y = y''x^2 + 2y'x - 2y''x^2$$

$$2y = 2y'x - y''x^2$$

Nota. - Date cuenta, se deriva la cantidad de incógnitas que hay.

Fresita 4.

Determine la ecuación diferencial de:

$$y = Ax^2 + Bx + C \text{ donde } A, B \text{ y } C \text{ son números.}$$

Solución. Derivamos 3 veces

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

$$y''' = 0 \quad \text{esta la ecuación diferencial}$$

Fresita 5.

Determine la ecuación diferencial de:

$$y = c^2 + cx$$

Solución. Derivamos solo una vez.

$$y' = c \quad \text{ahora reemplazamos.}$$

$$y = (y')^2 + y'x$$

Fresita 6.

Determine la ecuación diferencial de:

$$y = Ae^x + Be^{-x}$$

Solución. Derivamos dos veces.

$$y' = Ae^x - Be^{-x}$$

$$y'' = Ae^x + Be^{-x}$$

Sumando las derivadas determinamos que:

$$Ae^x = \frac{y' + y''}{2}$$

Restando las derivadas

$$B e^{-x} = \frac{y'' - y'}{2}$$

Reemplazamos en la ecuación original.

$$y = \left(\frac{y' + y''}{2} \right) + \left(\frac{y'' - y'}{2} \right)$$

$$y = y''$$

Nota. - Para encontrar los valores de A y B normalmente lo hacen con el método de Kramer.

Método de las determinantes

$$y = A e^x + B e^{-x}$$

$$y' = A e^x - B e^{-x}$$

$$y'' = A e^x + B e^{-x}$$

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & y \\ 1 & -e^{-x} & y' \\ 1 & e^{-x} & y'' \end{vmatrix}$$

$$e^x \cdot e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix}$$

$$e^0 \cdot \left[y \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$1 \cdot (y \cdot 2 - y' \cdot 0 + y''(-2)) = 0$$

$$2y = 2y''$$

$$y = y''$$

Fresita 7.

Determine la ecuación diferencial de:

$$y = A e^x + B e^{-5x} - 0.2$$

Solución. Derivamos dos veces.

$$y' = A e^x - 5B e^{-5x}$$

$$y'' = A e^x + 25B e^{-5x}$$

Usando el método de Kramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & -5e^{-5x} \\ e^x & 25e^{-5x} \end{vmatrix} = (e^x)(25e^{-5x}) - (e^x)(-5e^{-5x})$$

$$\Delta = 25e^{-4x} + 5e^{-4x} = 30e^{-4x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y' & -5e^{-5x} \\ y'' & 25e^{-5x} \end{vmatrix} = 25e^{-5x}y' - (-5e^{-5x})y''$$

$$\Delta_1 = (25y' + 5y'')e^{-5x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & y' \\ e^x & y'' \end{vmatrix} = e^xy'' - e^xy'$$

$$\Delta_2 = (y'' - y')e^x \quad \text{Terminado calculamos "A" y "B"}$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(25y' + 5y'')e^{-5x}}{30e^{-4x}} = \frac{5y' + y''}{6e^x}$$

$$B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(y'' - y')e^x}{30e^{-4x}} = \frac{y'' - y'}{30e^{-5x}}$$

Reemplazamos en la ecuación original.

$$y = \left(\frac{5y' + y''}{6e^x} \right) e^x + \left(\frac{y'' - y'}{30e^{-5x}} \right) e^{-5x} - 0.2$$

$$5y = 4y' + y'' - 1$$

Notas del autor: Las ecuaciones diferenciales nos permiten modelar fenómenos del mundo real de manera precisa y cuantitativa. Desde el movimiento de los planetas hasta el crecimiento de las poblaciones, las ecuaciones diferenciales son una herramienta fundamental en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería.

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

Determine la ecuación diferencial para cada función.

$$y = 2x + C$$

$$\text{Rpta: } y' = 2$$

$$y = Bx^3 - \frac{x}{2}$$

$$\text{Rpta: } 6y = (2y' + 1)x - 3x$$

$$y = Ax^3 - Bx$$

$$\text{Rpta: } 6y = 6y'x - 2y''x^2$$

$$y = c^3 - cx$$

$$\text{Rpta: } y = -(y')^3 - y'x$$

$$y = Ae^{2x}$$

$$\text{Rpta: } 2y = y'$$

$$y = A \sin 5x + B \cos 5x$$

$$\text{Rpta: } y'' + 5^2 y = 0$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^x$$

$$\text{Rpta: } y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

$$\arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(A\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$$

$$\text{Rpta: } (x - y)dy - (x + y)dx = 0$$

$$y = A \cos(x + B)$$

$$\text{Rpta: } y'' = y$$

Aplicaciones Geométricas

En esencia, las ecuaciones diferenciales nos permiten describir y estudiar propiedades de objetos geométricos como curvas, superficies y variedades de mayor dimensión. Al expresar las propiedades geométricas en términos de derivadas, podemos utilizar el poderoso lenguaje del cálculo para analizar y resolver problemas geométricos. Para estas preguntas lo que haremos es hallar la ecuación diferencial de tangentes a determinadas curvas.

Principal formula a emplearse: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Donde las coordenadas x_0 e y_0 pertenecen a un punto de paso P_0

Mora 1.

Determine la ecuación diferencial de las tangentes a la parábola cuya ecuación es: $y = x^2 + 2$

Solución.

Buscamos un punto de paso, para este caso será el punto tangente a la curva: $P_0 = (a; b)$, este punto debe satisfacer la ecuación: $y = x^2 + 2$

$$b = (a)^2 + 2$$

Para la familia de tangentes su ecuación será: $y -$

$$y_0 = m(x - x_0)$$

Para el punto de paso $P = (a; b)$:

$$y - b = m(x - a)$$

$$y = m(x - a) + \underbrace{a^2 + 2}_b$$

Para hallar la pendiente: $y = x^2 + 2$

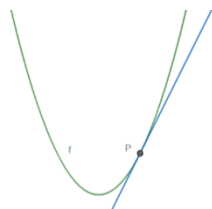
$$\frac{dy}{dx} = m = 2x \rightarrow m = 2(a)$$

$$\text{Reemplazamos: } y = \underbrace{(2a)}_m (x - a) + \underbrace{a^2 + 2}_b$$

$$y = 2ax - 2a^2 + a^2 + 2$$

$$y = 2ax - a^2 + 2 \text{ De aquí sacamos la ecuación diferencial.}$$

$$y' = 2a \Rightarrow a = \frac{y'}{2}$$



$$y = 2 \left(\frac{y'}{2} \right) x - \left(\frac{y'}{2} \right)^2 + 2$$

$$y = y'x - \frac{(y')^2}{4} + 2$$

$$4y = 4y'x - (y')^2 + 8$$

Mora 2.

Determine la ecuación diferencial de las tangentes a la circunferencia:

$$9 = x^2 + y^2$$

Solución.

Buscamos un punto de paso, para este caso será el punto tangente a la curva: $P_0 = (a; b)$, este punto debe satisfacer la ecuación: $9 = x^2 + y^2$

$$9 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{9 - b^2}$$

Para la familia de rectas, la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Para el punto de paso $P = (a; b)$:

$$y - b = m(x - a)$$

$$y = m(x - a) + \underbrace{a^2 + 2}_b$$

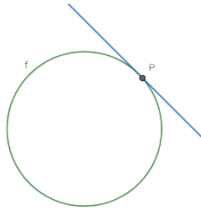
Para hallar la pendiente: $9 = x^2 + y^2$

$$0 = 2x + 2y \underbrace{y'}_m \Rightarrow m = -\frac{x}{y} \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$$

$$\text{Reemplazamos: } y = \underbrace{\left(-\frac{a}{b} \right)}_m (x - a) + b$$

$$y = \frac{-ax + \overbrace{a^2 + b^2}^9}{b}$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{9 - b^2}x}{b}$$



$$by = 9 - \sqrt{9 - b^2}x \dots (\alpha)$$

De aquí sacamos la ecuación diferencial.

$$by' = -\sqrt{9 - b^2} \Rightarrow (b^2)(y')^2 = 9 - b^2$$

$$(b^2)(y')^2 + b^2 = 9 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{1 + (y')^2}$$

Reemplazamos en α

$$\sqrt{\frac{9}{1 + (y')^2}}y = 9 - \sqrt{9 - \frac{9}{1 + (y')^2}}x$$

$$\frac{3y}{\sqrt{1 + (y')^2}} + \frac{3y'x}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 9$$

$$y + xy' = 3\sqrt{1 + (y')^2}$$

Mora 3.

Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias en el plano xy

Solución. Para esta pregunta será sencillo por que la ecuación será

$$\text{directa: } (x - A)^2 + (y - B)^2 = C$$

Al ser 3 constantes derivaremos 3 veces

Primera derivada implícita:

$$2(x - A) + 2(y - B)y' = 0$$

$$(y - B)y' = A - x$$

Segunda derivada implícita:

$$y' \cdot y' + (y - B)y'' = -1$$

$$(y')^2 + 1 = (B - y)y''$$

$$(y')^2 + 1 + y'' = By'' \dots (\alpha)$$

Tercera derivada:

$$2y' \cdot y'' + y''' = By'''$$

$$b = (a)^2 + 2$$

Para la familia de tangentes su ecuación será:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Para el punto de paso $P = (a; b)$:

$$y - b = m(x - a)$$

$$y = m(x - a) + \underbrace{a^2 + 2}_b$$

Para hallar la pendiente: $y = x^2 + 2$

$$\frac{dy}{dx} = m = 2x \rightarrow m = 2(a)$$

$$\text{Reemplazamos: } y = \underbrace{(2a)}_m (x - a) + \underbrace{a^2 + 2}_b$$

$$y = 2ax - 2a^2 + a^2 + 2$$

$y = 2ax - a^2 + 2$ De aquí sacamos la ecuación diferencial.

$$y' = 2a \Rightarrow a = \frac{y'}{2}$$

$$y = 2\left(\frac{y'}{2}\right)x - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 + 2$$

$$y = y'x - \frac{(y')^2}{4} + 2$$

$$4y = 4y'x - (y')^2 + 8$$

Mora 4.

Hallar la ecuación diferencial de todas las rectas tangentes a la gráfica de la función: $y = \text{sen}x$

Solución.

Buscamos un punto de paso, para este caso será el punto tangente a la curva: $P_0 = (a; b)$, este punto debe satisfacer la ecuación: $b = \text{sena}$

Para la familia de rectas, la ecuación será:

$$y - y_0 = m_T(x - x_0)$$

Para el punto de paso $P = (a; b)$:

$$y - b = m_T(x - a)$$

$$y = m_T(x - a) + \underbrace{\text{sena}}_b$$

Para hallar la pendiente: $y = \text{sen}x$

$$\underbrace{y'}_{m_T} = \cos x \Rightarrow m_T = \cos x \Rightarrow m_T = \cos a$$

Reemplazamos: $y = \underbrace{\cos a}_{m_T} (x - a) + \text{sena}$

$$y' = \cos a$$

Donde: $a = \arccos(y')$

$$y = y'(x - \arccos(y')) + \text{sena}$$

Para hallar el sena

$$y' = \cos a \Rightarrow (y')^2 = \cos^2 a \Rightarrow -(y')^2 = -\cos^2 a$$

$$1 - (y')^2 = 1 - \cos^2 a$$

$$1 - (y')^2 = \text{sen}^2 a$$

$$\text{sena} = \sqrt{1 - (y')^2}$$

$$y = y'(x - \arccos(y')) + \sqrt{1 - (y')^2}$$

Mora 5.

Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: “El área de la región encerrada por la curva, los ejes X e Y , y la ordenada del punto $P(x, y)$ de la curva es igual a $(x^2 + 2y^2)$ ”

Solución. Realizamos un gráfico para representar la familia de curvas.

Por teoría:

$$\text{Área} = \int_0^x y dx$$

Por dato:

$$\text{Área} = x^2 + 2y^2$$

Igualando las anteriores ecuaciones.

$$\int_0^x y dx = x^2 + 2y^2$$

Aplicando teorema fundamental del cálculo:

$$y = 2x + 4yy'$$

Mora 6.

Hallar la ecuación diferencial de todas las rectas cuyos productos de las intersecciones con los ejes coordenados sean iguala a “c”.

Solución.

Realizamos el bosquejo de la familia de rectas:

De este grafico calculamos la pendiente

$$m = -\frac{b}{a}$$

Por dato tenemos: $ab = c$

La ecuación que representa a la recta es:

$$y - b = m(x - a)$$

Reemplazamos en la ecuación anterior.

$$y - b = \left(-\frac{b}{a}\right)\left(x - \frac{c}{b}\right)$$

$$y - b = \left(-\frac{b^2}{c}\right)\left(x - \frac{c}{b}\right)$$

$$y - 2b = -\frac{b^2}{c}x$$

Donde, la anterior ecuación es la familia de rectas pedida.

Para hallar la ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{b^2}{c}$$

$$b^2 = -cy' \Rightarrow b = \pm\sqrt{-cy'}$$

Reemplazamos en la familia de rectas:

$$y - \pm\sqrt{-cy'} = -\frac{-cy'}{c}x$$

$$y + xy' = \pm\sqrt{-cy'}$$

$$(y + xy')^2 = -cy'$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

Mora 1.

Determine la ecuación diferencial de las tangentes a la parábola cuya ecuación es: $y = x^3 + 3$

Mora 2.

Determine la ecuación diferencial de las tangentes a la elipse: $36 = 4x^2 + 9y^2$

Mora 3.

Determine la ecuación diferencial de las tangentes a la hipérbola: $36 = 4x^2 - 9y^2$

Mora 4.

Hallar la ecuación diferencial de todas las rectas tangentes a la gráfica de la función: $y = \cos x$

Mora 5.

Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: “El área de la región encerrada por la curva, los ejes X e Y , y la ordenada del punto $P(x, y)$ de la curva es igual a $(3x^2 + \sqrt{y})$ ”

Solución de Ecuaciones diferenciales

Solución: Es una función que, cuando se evalúa junto con sus derivadas en los puntos del dominio, verifica la igualdad expresada en la ecuación diferencial.

Solución general: Es una expresión matemática que contiene constantes arbitrarias y que, al asignar distintos valores a estas constantes, genera una infinidad de funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Gráficamente, estas funciones trazan una familia de curvas en el plano o en el espacio.

Solución particular. Es una solución que se obtiene a partir de la solución general en esta el valor de las constantes arbitrarias toma un valor específico.

Ejemplo:

Siendo la ecuación diferencial: $y' = 6$

La solución general será de la función: $y = 6x + C_1$

Donde C_1 es una constante arbitraria.

Una solución particular o **específica** $y = 6x + 4$

Aquí la constante tomo el valor de 4.

Ya integrados al tema aquí un par de frutitas.

Papayita 1.

Verificar que la función: $y = x + 3x^2$ es solución de la E.D.O.
 $y'(x + 3x^2) - y(1 + 6x) = 0$

Solución.

En este tipo de preguntas lo único que tendremos que hacer es comprobar que el lado izquierdo es igual al lado derecho caso contrario no es solución.

$$\underbrace{y'(x + 3x^2) - y(1 + 6x)}_{\text{Lado izquierdo}} = \underbrace{0}_{\text{Lado derecho}}$$

Para ello derivamos a $y \Rightarrow y' = 1 + 6x$

Ahora reemplazamos en la E.D.O.

$$(1 + 6x)(x + 3x^2) - (x + 3x^2)(1 + 6x) = 0$$

$$0 = 0$$

l.q.q.d(lo que queríamos demostrar)

Papayita 2.

Verificar que la función: $y = 2x^2$ es solución de la E.D.O. $xy' = 2y$ determinar el tipo de solución si es particular o una solución general (primitiva).

Solución.

Derivamos a $y \Rightarrow y' = 4x$

Ahora reemplazamos en la E.D.O.

$$x(4x) = 2(2x^2)$$

$$4x^2 = 4x^2$$

l.q.q.d(lo que queríamos demostrar)

Es una solución particular porque no contiene constantes arbitrarias.

Papayita 3.

Verificar que la relación: $x^2 + y^2 = C$ es solución de la E.D.O. $yy' + x = 0$ determinar el tipo de solución si es particular o una solución general (primitiva).

Solución. Para algunos problemas se tendrá que usar derivación implícita y llevar a la forma de la E.D.O.

Usamos derivación implícita: $2x + 2yy' = 0$

Mitad: $x + yy' = 0$

Notamos que la ecuación obtenida es igual a la pedida.

l.q.q.d(lo que queríamos demostrar)

Es una **solución general** ya que contiene una constante lo cual hace que sea una familia de curvas en este caso es una familia de circunferencias.

Papayita 4.

Verificar que la función: $y = e^x(1 + x)$ es solución de la E.D.O. $y'' - 2y' + y = 0$ determinar el tipo de solución si es particular o una solución general (primitiva).

Solución. $y = e^x(1 + x)$

Derivamos con regla del producto:

$$y' = e^x + (1+x)e^x = 2e^x + xe^x$$

$$y'' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$$

Ahora reemplazamos en la E.D.O.

$$\begin{aligned}(3e^x + xe^x) - 2(2e^x + xe^x) + [e^x(1+x)] &= 0 \\ -e^x - xe^x + [e^x(1+x)] &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

l.q.q.d(lo que queríamos demostrar)

Es una solución particular porque no contiene constantes arbitrarias.

Papayita 5.

Verificar que la función: $x = y \ln cy$ es primitiva de la E.D.O.

$$y'(x+y) = y$$

Solución. Recuerda que en la E.D.O. no hay constante “c” por lo cual nos valdremos de algunas propiedades de logaritmos antes de derivar.

$$x = y \ln cy \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln(cy) \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln c + \ln y$$

Ahora sí, usamos derivación implícita.

$$\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{y'}{y} \Rightarrow y - xy' = yy' \Rightarrow y = yy' + xy'$$

$$y = (x+y)y'$$

l.q.q.d

Papayita 6.

Verificar que la función: $y = \ln(x+c) - 4$ es primitiva de la E.D.O.

$$y'e^{y+4} = 1$$

Solución. Realizaremos el método I.

$$y = \ln(x+c) - 4 \Rightarrow y' = \frac{1}{x+c}$$

Reemplazamos en la ecuación original:

$$\frac{1}{x+c} e^{\ln(x+c)} = 1$$

$$\frac{1}{x+c} \cdot (x+c) = 1$$

$$1 = 1$$

l.q.q.d

Realizamos método 2.

$$y = \ln(x + c) - 4 \Rightarrow y' = \frac{1}{x + c}$$

$$\frac{1}{y'} = x + c \Rightarrow c = \frac{1}{y'} - x$$

$$y = \ln \left(x + \underbrace{\frac{1}{y'} - x}_c \right) - 4$$

$$y = \ln \left(\frac{1}{y'} \right) - 4 \Rightarrow y + 4 = \ln \left(\frac{1}{y'} \right)$$

$$e^{y+4} = \frac{1}{y'} \Rightarrow y' e^{y+4} = 1$$

l.q.q.d

Papayita 7.

Verificar que la función paramétrica: $f(t) = \begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ es primitiva de

la E.D.O. $(1 + xy)y' + y^2 = 0$

Solución. Recordemos que la derivación paramétrica está dada por:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\begin{cases} x = te^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t + te^t = (1 + t)e^t \\ y = e^{-t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -e^{-t} \end{cases}$$

$$y' = \frac{-e^{-t}}{(1 + t)e^t} = \frac{-1}{(1 + t)e^{2t}}$$

Reemplazamos:

$$(1 + (te^t \cdot e^{-t})) \left[\frac{-1}{(1+t)e^{2t}} \right] + (-e^{-t})^2 = 0$$

$$(1+t) \left[\frac{-1}{(1+t)e^{2t}} \right] + e^{-2t} = 0$$

$$-e^{-2t} + e^{-2t} = 0$$

l.q.q.d

Papayita 8.

Determine los valores de m para el cual $y = e^{mx}$ es solución de la ecuación diferencial:

$$3y'' + 3y' - 18y = 0$$

Solución. Derivamos la solución dada para verificar.

$y' = me^x$; $y'' = m^2e^x$ Reemplazamos

$$3(me^x) + 3(m^2e^x) - 18e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m + m^2) = 6e^{mx}$$

$$m^2 + m - 6 = 0$$

$$(m+3)(m-2) = 0$$

$$m = -3 \vee m = 2$$

Papayita 9.

Verificar que la función: $x = y \int_0^x \sin t^2 dt$

$$y = xy' + y^2 \sin x^2$$

Solución. Desarrollamos la solución.

$$x = y \int_0^x \sin t^2 dt \Rightarrow \int_0^x \sin t^2 dt = \frac{x}{y}$$

Derivamos de forma implícita la solución brindada:

$$x = y \int_0^x \sin t^2 dt \text{ derivada del producto}$$

$$1 = y' \int_0^x \sin t^2 dt + y \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sin t^2 dt \right)$$

$$1 = y' \int_0^x \sin t^2 dt + y \sin x^2$$

$$1 = y' \left(\frac{x}{y} \right) + y \operatorname{sen} x^2$$

$$y = y'x + y^2 \operatorname{sen} x^2$$

l.q.q.d

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

1.- Verificar que la función: $y = \frac{x}{2} + x^2$ es solución de la E.D.O.

$$y' \left(\frac{x}{2} + x^2 \right) - y \left(\frac{1}{2} + 2x \right) = 0$$

2.- Verificar que la función: $y = 4x^3$ es solución de la E.D.O. $xy' = 5y$ y determinar el tipo de solución si es particular o una solución general (primitiva).

3.- Verificar que la relación: $y = 3\operatorname{sen} 7x + 5\operatorname{cos} 7x$ es solución de la E.D.O. $y'' + 7^2 y = 0$ determinar el tipo de solución si es particular o una solución general (primitiva).

4.- Verificar que la función: $y = \mathbf{E}^x(c_1 + c_2 x)$ es solución de la E.D.O. $y'' - 2y' + y = 0$ determinar el tipo de solución si es particular o una solución general (primitiva).

5.- Verificar que la función: $y = c^2 - cx$ es primitiva de la E.D.O. $(y')^2 + xy' = y$

6.- Verificar que la función: $y = \mathbf{E}^{\operatorname{arcsen} cx}$ es primitiva de la E.D.O. $xy' = ytg(Lny)$

7.- Verificar que la función paramétrica: $f(t) = \begin{cases} x = tLnt \\ y = t^2(2Lnt + 1) \end{cases}$ es primitiva de la E.D.O. $y'Ln\left(\frac{y'}{4}\right) = 4x$

8.- Determine los valores de c_1 y c_2 para el cual $y = c_1 + c_2 \mathbf{E}^{-3x}$ es solución de la ecuación diferencial:

$$y'' + 3y' = 0$$

9.- Verificar que la función: $x \int_0^x \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt = yLny$

$$xy' + xLny = x\operatorname{sen} x + yLny$$

Ecuaciones diferenciales de Primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación matemática que relaciona una función desconocida (a menudo denotada como y) con su primera derivada (dy/dx) respecto a una variable independiente (generalmente x). En otras palabras, es una ecuación que involucra a una función y su tasa de cambio instantánea.

En esta sección aprenderemos a resolver ejercicios de primer orden, es decir, ecuaciones que contengan a derivadas de primer orden.

Generalmente son de la forma:

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$$

La solución general normalmente contiene una sola constante.

Fresita 1.

Identifica la ecuación diferencial.

$$(y + \operatorname{sen} x)dx + (x^2y - \operatorname{tg} x)dy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - \frac{\cos x}{xy} = x$$

Solución.

$$(y + \operatorname{sen} x)dx + (x^2y - \operatorname{tg} x)dy = 0$$

$$\text{Donde } \begin{cases} A(x, y) = y + \operatorname{sen} x \\ B(x, y) = x^2y - \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Para la otra pregunta tenemos que operar

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{\cos x}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + \cos x}{xy}$$

$$xydy = (x^2y + \cos x)dx$$

$$0 = (x^2y + \cos x)dx + (-xy)dy$$

$$\text{Donde } \begin{cases} A(x, y) = x^2y + \cos x \\ B(x, y) = -xy \end{cases}$$

Fresita 2.

Identifica la ecuación diferencial.

$$\operatorname{sen} x \cdot y' + (x + 3y')y^2 = 0$$

Solución.

$$\operatorname{sen} x \cdot y' + 3y'y^2 + xy^2 = 0$$

$$(\operatorname{sen} x + 3y^2)y' + xy^2 = 0$$

Al desarrollar nos queda: $(\operatorname{sen} x + 3y^2)dy + xy^2dx = 0$

$$\text{Donde } \begin{cases} A(x, y) = xy^2 \\ B(x, y) = \operatorname{sen} x + 3y^2 \end{cases}$$

Fresita 3.

Identifica la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 + 3y}{y} = y$$

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{x^2 + 3y}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 - 3y}{y}$$

$$ydy = (y^2 - x^2 - 3y)dx$$

$$0 = (y^2 - x^2 - 3y)dx + (-y)dy$$

$$\text{Donde } \begin{cases} A(x, y) = y^2 - x^2 - 3y \\ B(x, y) = -y \end{cases}$$

Separación de Variables

Es un método utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de una forma particular. La idea central es reescribir la ecuación de manera que todas las términos que involucran a una variable estén de un lado de la igualdad y los términos que involucran a la otra variable estén del otro lado.

De lo anterior, tenemos nuestra ecuación:

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$$

El proceso de separación de variables será el de factorizar las respectivas funciones para:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Transformar a funciones de una sola variable y luego integrar.

Ejercicio 1. Resuelva la ecuación diferencial:

$$y' = 3x \quad \text{o} \quad dy - 3xdx = 0$$

Solución. Recuerde que para la expresión 1 realizamos: $y' = \frac{dy}{dx}$

Forma 1. $y' = 3x$ $\frac{dy}{dx} = 3x$ $dy = 3xdx$ $\int dy = \int 3xdx$ $y + C_1 = \frac{3x^2}{2} + C_2$ $y = \frac{3x^2}{2} + C$	Forma 2. $dy - 3xdx = 0$ $1dy - 3xdx = 0$ $\int 1dy - \int 3xdx = 0$ $y + C_1 - \left(\frac{3x^2}{2} + C_2\right) = 0$ $y + C_1 - \frac{3x^2}{2} - C_2 = 0$ $y - \frac{3x^2}{2} = C$
---	--

Nota. - Cuando usted se enfrente a un ejercicio que es de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

Y que además se cumple que la función se puede descomponer como el producto de funciones $f(x)$ y $g(y)$: $f(x, y) = h(x) \times g(y)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \times g(y)$$

De este modo podemos trasladar los términos y quedara de la siguiente forma:

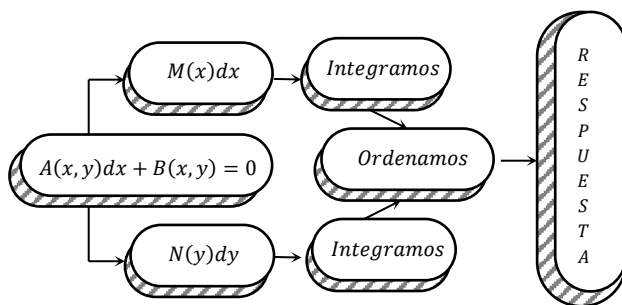
$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$

De este modo ya podemos integrar y encontrar la solución:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx$$

Con lo cual la solución de la ecuación es bien sencilla.

En resumen:



Ejercicio 2. Resolver

$$5dx + 3dy = 0$$

Solución.

$$\int 5dx + \int 3ydy = 0$$

$$5x + C_1 + 3y + C_2 = 0$$

$$5x + 3y = C$$

Ejercicio 3. Resolver

$$13dx - 5ydy = 0$$

Solución. $13dx = 5ydy$

$$\int 13dx = \int 5ydy$$

$$13x + C_1 = \frac{5y^2}{2} + C_2$$

$$13x = \frac{5y^2}{2} + C$$

¿TE DISTE CUENTA?

Si la ecuación es de la forma “ $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ” se integra de forma inmediata miembro a miembro.

Mientras que cuando es de la forma

“ $M(x)dx - N(y)dy = 0$ ” primero tengo que cambiar el termino $M(x)dx = N(y)dy$ después se debe integrar y al final ordenar de ser posible.

Ejercicio 4.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$e^x dx + 5\cos(y)dy = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int e^x dx + \int 5\cos(y)dy &= 0 \\ e^x + C_1 + 5\sin(y) + C_2 &= 0 \\ e^x + 5\sin(y) &= C\end{aligned}$$

Recuerde que “ C_1 , C_2 y C ” son constantes es decir números.

Ejercicio 5.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$xe^{2x} dx + y\ln(y)dy = 0$$

Solución.

$$\int xe^{2x} dx + \int y\ln(y)dy = 0$$

Es aquí lo realmente tedioso a la hora de resolver ecuaciones diferenciales, claro que solo es aplicar los métodos de integración al momento de resolver este ejercicio, aplicaremos integración por partes. Aplicamos integración por tabulación (caso especial de integración por partes)

Nota: la columna de la izquierda se deriva hasta reducirse mientras que la columna derecha se integra el numero de veces que se deriva la columna izquierda.

Por tabulación

x	$\searrow +$	e^{2x}
		e^{2x}
1	$\searrow +$	$\frac{e^{2x}}{2}$
		$\frac{e^{2x}}{4}$
0		

Integración por partes

$\ln(y)$	$\searrow +$	y
		y^2
$\frac{1}{y}$	$\swarrow -$	$\frac{y^2}{2}$

$$\overbrace{\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}}^{\int x e^{2x} dx} + \overbrace{\frac{y^2}{2} \ln(y) - \int \frac{y^2}{2} dy}^{\int y \ln(y) dy} = 0$$

$$\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{y^2}{2} \ln(y) - \frac{y^2}{4} = C$$

Para evitar operaciones innecesarias con las constantes a partir de ahora solo pondremos una.

Ejercicio 6.

Resolver la ecuación diferencial.

$$y' = \frac{y}{x}$$

Solución. Recordemos, $y' = dy/dx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Reemplazamos.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Trasladamos las variables.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Integramos

$$\ln y = \ln x + C_1$$

Identificamos la constante de integración.

$$\ln y = \ln x + \overbrace{\ln c}^{C_1}$$

$$\ln y = \ln xc$$

Damos forma a la constante

$$e^{\ln y} = e^{\ln xc}$$

$$\ln A + \ln B = \ln(A \cdot B)$$

$$y = xc$$

Eliminamos los logaritmos

Respuesta final.

Observaciones:

Es importante recordar las diferentes nomenclaturas que tiene las derivadas, por si no las recuerda se las muestra:

$$\frac{dy}{dx} = y' = D_x$$

Ejercicio 7.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = -y(1 - y)$$

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = -y(1 - y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(y - 1)$$

Acomodamos para integrar

$$\int \frac{dy}{y(y - 1)} = \int dx$$

Realizamos quebrados en el lado izquierdo.

$$\int \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{y - 1} - \int \frac{dy}{y} = x$$

Distribuimos la integral
Juntamos el logaritmo con
 $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$

$$\ln(y - 1) - \ln y = x + C_1$$

Damos forma a la constante

$$\ln \left[\frac{y - 1}{y} \right] = x + \widehat{\ln C}^{C_1}$$

Eliminamos los logaritmos

$$e^{\ln \left(\frac{y - 1}{y} \right)} = e^{x + \ln C}$$

Propiedad: $e^{\ln C} = C$

$$\frac{y - 1}{y} = C e^x$$

Pasa al otro miembro

$$y - 1 = y C e^x$$

Factorizamos y pasamos a dividir

$$y - y C e^x = 1$$

Respuesta final.

$$y = \frac{1}{1 - C e^x}$$

Ejercicio 8. Resolver la ecuación diferencial. $x^4 dx + (y + 1)^3 dy = 0$

Solución.

$$\int x^4 dx + \int (y + 1)^3 dy = 0$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{(y + 1)^4}{4} = C$$

Ejercicio 9. Resolver la ecuación diferencial. $x(y + 1)dx + dy = 0$

Solución. Esta pregunta la realizaremos por dos métodos:

Método 1. Es el método previamente desarrollado

$$x(y + 1)dx = -dy$$

Trasladamos la derivada

$$x dx = -\frac{dy}{y + 1}$$

Separamos las variables

$$\int x dx = -\int \frac{dy}{y + 1}$$

Integramos

$$\frac{x^2}{2} = -\ln(y + 1) + \overbrace{\ln C}^{C_1}$$

Identificamos la constante de integración.

$$\frac{x^2}{2} = \ln\left(\frac{C}{y + 1}\right)$$

Damos forma a la constante
 $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{C}{y + 1}$$

Eliminamos los logaritmos

$$y + 1 = C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Movemos el exponencial

$$y = C e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

Despejamos la variable

Método 2. Este método prioriza las operaciones en ecuaciones, a veces es usado por los maestros.

$$\frac{x(y+1)dx}{y+1} + \frac{dy}{y+1} = \frac{0}{y+1}$$

Dividimos por las expresiones que no corresponden
Simplificamos

$$x dx + \frac{dy}{y+1} = 0$$

$$\int x dx + \int \frac{dy}{y+1} = 0$$

Integramos

$$\frac{x^2}{2} + \ln(y+1) = C_1$$

Despejamos al logaritmo

$$\ln(y+1) = \ln c - \frac{x^2}{2}$$

Eliminamos los logaritmos

$$y+1 = e^{\ln c - \frac{x^2}{2}}$$

Usamos la expresión:

$$e^{\ln C} = C$$

$$y+1 = c e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Despejamos la variable

$$y = c e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

Ejercicio 10. Resolver la ecuación diferencial.

$$xy dx + (1+x^2) dy = 0$$

Solución.

$$\frac{xy dx}{y} + \frac{(1+x^2) dy}{y} = \frac{0}{y}$$

$$x dx + \frac{(1+x^2) dy}{y} = 0$$

$$\frac{x dx}{(1+x^2)} + \frac{(1+x^2) dy}{(1+x^2)y} = \frac{0}{(1+x^2)}$$

$$\frac{x dx}{(1+x^2)} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln y = C_1$$

$$\ln(1+x^2) + 2 \ln y = C_1$$

$$\ln(1+x^2) + \ln y^2 = \ln c$$

$$\ln[(1+x^2)y^2] = \ln c$$

$$(1 + x^2)y^2 = c$$

Ejercicio 11. Resolver la ecuación diferencial. $(2y + 5)dx + (x - 4)dy = 0$

Solución.

$$\frac{(2y + 5)dx}{(2y + 5)(x - 4)} + \frac{(x - 4)dy}{(2y + 5)(x - 4)} = \frac{0}{(2y + 5)(x - 4)}$$

$$\frac{dx}{(x - 4)} + \frac{dy}{(2y + 5)} = 0$$

$$\int \frac{dx}{(x - 4)} + \int \frac{dy}{(2y + 5)} = 0$$

$$\ln(x - 4) + \frac{1}{2} \ln(2y + 5) = C_1$$

$$2\ln(x - 4) + \ln(2y + 5) = C_1$$

$$\ln(x - 4)^2 + \ln(2y + 5) = \ln c$$

$$\ln[(x - 4)^2(2y + 5)] = \ln c$$

$$(x - 4)^2(2y + 5) = c$$

Ejercicio 12. Resolver la ecuación diferencial.

$$x^3(y - 1)dx + y^2(x + 1)dy = 0$$

Solución.

$$\frac{x^3(y - 1)dx}{(y - 1)(x + 1)} + \frac{y^2(x + 1)dy}{(y - 1)(x + 1)} = 0$$

$$\frac{x^3 dx}{(x + 1)} + \frac{y^2 dy}{(y - 1)} = 0$$

$$\int \frac{x^3 dx}{(x + 1)} + \int \frac{y^2 dy}{(y - 1)} = 0$$

$$\int \left[x^2 - x + 1 - \frac{1}{(x + 1)} \right] dx + \int \left[y + 1 + \frac{1}{(y - 1)} \right] dy = 0$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x + 1) + \frac{y^2}{2} + y + \ln(y - 1) = c$$

Hasta aquí los ejercicios no presentaban demasiada dificultad a partir de este momento en los siguientes ejercicios se tendrá que realizar ciertos procesos antes de resolverlos.

Ejercicio 13.

Resolver la ecuación diferencial.

$$(x^2 - yx^2)dx + (y^2 + xy^2)dy = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned} x^2(1-y)dx + y^2(1+x)dy &= 0 \\ \frac{x^2(1-y)dx}{(1-y)(1+x)} + \frac{y^2(1+x)dy}{(1-y)(1+x)} &= 0 \\ \frac{x^2dx}{(1+x)} + \frac{y^2dy}{(1-y)} &= 0 \\ \int \frac{x^2dx}{(1+x)} + \int \frac{y^2dy}{(1-y)} &= 0 \\ \int \left[x - 1 + \frac{1}{(1+x)} \right] dx + \int \left[-y - 1 + \frac{1}{(1-y)} \right] dy &= 0 \\ \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) - \frac{y^2}{2} - y - \ln(1-y) &= c \quad *** \\ x^2 - 2x + 2\ln(1+x) - y^2 - 2y - 2\ln(1-y) &= c \\ x^2 - 2x + 1^2 + \ln(1+x)^2 - y^2 - 2y - 1^2 - \ln(1-y)^2 &= c \\ (x-1)^2 + \ln(1+x)^2 - (y+1)^2 - \ln(1-y)^2 &= c \\ (x-1)^2 - (y+1)^2 + \ln \left[\frac{(1+x)^2}{(1-y)^2} \right] &= c \\ (x-1)^2 - (y+1)^2 + \ln \left[\frac{1+x}{1-y} \right]^2 &= c \end{aligned}$$

¿Sabías que...?

En el ejercicio anterior la solución ya está dada en la línea donde se ubica ***, no obstante, es mejor darle una mejor forma a la respuesta de ser posible.

Además: Siendo “c” una constante es decir un número.

No sufre alteraciones con las operaciones aritméticas ejemplo:

$$c + 2 = c$$

$$c - 23 = c$$

$$c \times 42 = c$$

$$\frac{c}{232} = c$$

La constante o bueno su representación “c” no cambia.

Ejercicio 14.

Resolver la ecuación diferencial.

$$xy' - y = y^3$$

Solución.

$$x \frac{dy}{dx} = y^3 + y$$

$$\frac{dy}{y^3 + y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y^3 + y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left[\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + 1} \right] dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y - \frac{1}{2} \ln (y^2 + 1) = \ln x + C_1$$

$$2 \ln y - \ln (y^2 + 1) = 2 \ln x + C_1$$

$$\ln y^2 - \ln (y^2 + 1) = \ln x^2 + \ln c$$

$$\ln \left[\frac{y^2}{y^2 + 1} \right] = \ln x^2 c$$

$$\frac{y^2}{y^2 + 1} = x^2 c$$

$$y^2 = y^2 x^2 c + x^2 c$$

$$y^2 - y^2 x^2 c = x^2 c$$

$$y^2 = \frac{x^2 c}{1 - x^2 c}$$

Ejercicio 15.

Resolver la ecuación diferencial.

$$e^{2x-y} dx + e^{y-2x} dy = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}}{e^y} dx + \frac{e^y}{e^{2x}} dy &= 0 \\ [e^{2x} e^y] \frac{e^{2x}}{e^y} dx + [e^{2x} e^y] \frac{e^y}{e^{2x}} dy &= 0 \\ e^{4x} dx + e^{2y} dy &= 0 \\ \int e^{4x} dx + \int e^{2y} dy &= 0 \\ \frac{1}{4} e^{4x} dx + \frac{1}{2} e^{2y} dy &= c \\ e^{4x} dx + 2e^{2y} dy &= c \end{aligned}$$

Recuerde que para separar las variables no siempre vamos a dividir.

Ejercicio 16.

Resolver la ecuación diferencial.

$$y' = x e^{y-x^2}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x e^y}{e^{x^2}} \\ \frac{dy}{e^y} &= \frac{x dx}{e^{x^2}} \\ e^{-y} dy &= x e^{-x^2} dx \\ \int e^{-y} dy &= \int x e^{-x^2} dx \\ -e^{-y} &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \\ 2e^{-y} &= e^{-x^2} + c \end{aligned}$$

Ejercicio 17.

Resolver la ecuación diferencial.

$$2xyy' = 1 + y^2, \text{ para } y(-1) = 1$$

Solución.

$$\begin{aligned} 2xy \frac{dy}{dx} &= 1 + y^2 \\ \frac{ydy}{1 + y^2} &= \frac{dx}{2x} \\ \int \frac{ydy}{1 + y^2} &= \int \frac{dx}{2x} \\ \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) &= \frac{1}{2} \ln x + C_1 \\ \ln(1 + y^2) &= \ln x + C_1 \\ \ln(1 + y^2) &= \ln x + \ln C \\ \ln(1 + y^2) &= \ln xC \\ 1 + y^2 &= xC \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de C, usamos $y(3) = 1$ donde: $x = 3$ e $y = 1$

$$\begin{aligned} 1 + (1)^2 &= (3)C \\ 2 &= 3C \\ C &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La ecuación será:

$$1 + y^2 = \frac{2}{3}x$$

Ejercicio 18.

Resolver la ecuación diferencial.

$$2 \frac{dy}{dx} = x(1 - y^2) \text{ para } y(0) = \frac{1}{2}$$

Solución.

$$\frac{2dy}{1 - y^2} = xdx$$

$$\int \frac{2dy}{1-y^2} = \int xdx$$

$$\int \left[\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} \right] dy = \int xdx$$

$$\ln(1+y) - \ln(1-y) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\ln \left[\frac{1+y}{1-y} \right] = \frac{x^2}{2} + \ln c$$

$$e^{\ln \left[\frac{1+y}{1-y} \right]} = e^{\frac{x^2}{2} + \ln c}$$

$$\frac{1+y}{1-y} = c e^{\frac{x^2}{2}}$$

Para encontrar el valor de C, usamos $y(0) = \frac{1}{2}$ donde: $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = c e^{\frac{(0)^2}{2}}$$

$$\frac{3}{2} = c e^0$$

$$c = 3$$

La ecuación será:

$$\frac{1+y}{1-y} = 3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Ejercicio 19.

Resolver la ecuación diferencial.

$$(1+x^3)dy - x^2ydx = 0$$

Solución.

$$(1+x^3)dy = x^2ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2dx}{1+x^3}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2 dx}{1+x^3}$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln (1+x^3) + C_1$$

$$\ln y = \ln (1+x^3)^{\frac{1}{3}} + \ln c$$

$$\ln y = \ln c(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = c(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 20. Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + x}{x^2y - y} \text{ para } y(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2 + 1)}{y(x^2 - 1)}$$

$$\frac{ydy}{y^2 + 1} = \frac{xdx}{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{ydy}{y^2 + 1} = \int \frac{xdx}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{2} \ln (y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln (x^2 - 1) + C_1$$

$$\ln (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \ln (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$\ln (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \ln C(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = C(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

Para encontrar el valor de C, usamos

$$y(\sqrt{2}) = \sqrt{3} \text{ donde: } x = \sqrt{2} \text{ e } y = \sqrt{3}$$

$$\left((\sqrt{3})^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} = c \left((\sqrt{2})^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C = 2$$

La ecuación será:

$$(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 2(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

Ejercicio 21.

Resolver la ecuación diferencial.

$$tg y dy = sen^3 x dx, \text{ para } y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int tg y dy &= \int sen^3 x dx \\ \int (sec^2 y - 1) dy &= \int sen^2 x \cdot sen x dx \\ \int sec^2 y dy - \int dy &= \int (1 - cos^2 x) sen x dx \\ tg y - y + c &= \int sen x dx - \int cos^2 x sen x dx \\ tg y - y + c &= -cos x - \frac{1}{3} cos^3 x\end{aligned}$$

Para encontrar el valor de C, usamos $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ donde: $x = \frac{\pi}{3}$ e $y = 0$

$$\begin{aligned}tg(0) - 0 + c &= -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3} cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ c &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ c &= -\frac{13}{24}\end{aligned}$$

La ecuación será:

$$tg y - y - \frac{13}{24} = -cos x - \frac{1}{3} cos^3 x$$

Ejercicio 22.

Resolver la ecuación diferencial.

$$sen y' = x$$

Solución.

$$y' = arcsen x + n\pi$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \arcsen x + n\pi \\ dy &= (\arcsen x + n\pi)dx \\ \int dy &= \int (\arcsen x + n\pi) dx \\ y &= x \arcsen x - \sqrt{1-x^2} + n\pi x + C\end{aligned}$$

Ejercicio 23.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\ln y' = 4x$$

Solución.

$$\begin{aligned}y' &= e^{4x} \\ \frac{dy}{dx} &= e^{4x} \\ dy &= e^{4x} dx \\ \int dy &= \int e^{4x} dx \\ y &= \frac{1}{4}e^{4x} + C\end{aligned}$$

Ejercicio 24.

Resolver la ecuación diferencial.

$$x^2 y' \cos y + 1 = 0, y \rightarrow \frac{16}{3}\pi, x \rightarrow +\infty$$

Solución.

$$\begin{aligned}x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right) \cos y &= -1 \\ \cos y dy &= -\frac{1}{x^2} dx \\ \int \cos y dy &= -\int \frac{1}{x^2} dx\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{x} + C$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{16}{3} \pi \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + C \Rightarrow C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Que tiene infinitas soluciones

$$y = \pi - \arcsen \left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Donde la solución cumple con $n = 2$

$$y = \arcsen \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{x} \right) + 5\pi$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

Resuelva la ecuación diferencial:

1. $-y' = 5x^2$

Rpta. $y = \frac{5}{3}x^3 + C$

2. $-6x^2 dx - 2y dy = 0$

Rpta. $2x^3 - y^2 = C$

3. $-\ln x dx + 2\operatorname{sen}(y) dy = 0$

Rpta. $x \ln x - x - 2\cos y = C$

4. $-y dx - x dy = 0$

Rpta. $y = xC$

5. $-\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x-2)(y-3)}{(x-1)(y-2)(x-3)}$

Rpta. $(x-1)(y+3)^5 = c(y-1)(x+3)^5$

6. $-x dy + y dx + x y \cos x dx = 0$

Rpta. $xy = C e^{-\operatorname{sen} x}$

$$7. -x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$$

$$\text{Rpta. } \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$$

$$8. -y' = 3^{x+y}$$

$$\text{Rpta. } 3^x + 3^{-y} = C$$

$$9. -\frac{dA}{ds} = \frac{A+1}{\sqrt{s} + \sqrt{sA}}$$

$$\text{Rpta. } 2\sqrt{A} + \ln(A+1) - 2\arctan\sqrt{A} = 2\sqrt{s} + C$$

$$10. -e^x tgy dx + (1 - e^x)sen^2 y dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \ln(1 - e^x) + \frac{1}{4}\cos 2y = C$$

$$11. -sen^2 y dx + cos^2 x dy = 0; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Rpta. } \tan x \tan y = 1$$

$$12. -\frac{ds}{dt} = \frac{sen t + e^{2s} sen t}{3e^s + e^s \cos 2t}; s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{Rpta. } 2\arctg(e^s) + \arctan(\cos t) = \frac{\pi}{2}$$

$$13. -\cos y dx + (1 - e^{-x})sen y dy = 0; y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Rpta. } (1 + e^x) \sec y = 2\sqrt{2}$$

$$14. -xy dx + \sqrt{1+x^2} dy = 0; y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } e^{-\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$15. -tg y' = x$$

$$\text{Rpta. } y = \arctg x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \pi n x + C$$

16. Resolver la ecuación diferencial.

$$x^3 y' - sen y = 1 = 0, y \rightarrow 5\pi, x \rightarrow \infty$$

$$\text{Rpta. } 2\arctg\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) + \frac{9}{2}\pi$$

Reducción De Ecuaciones Diferenciales A Variables Separables

La reducción a variables separables es una técnica que busca transformar esta ecuación en una forma más sencilla, donde todos los términos que involucran a una variable estén de un lado de la igualdad y los términos que involucran a la otra variable estén del otro lado es decir no todos los ejercicios serán de separación de variables no obstante si pertenecen a cierta categoría podremos convertir esas ecuaciones a separación de variables.

Ecuaciones Homogéneas.

Estructura: Las ecuaciones diferenciales homogéneas tienen una estructura particular donde los términos de mayor grado en x e y tienen el mismo grado.

Cambio de variable: Para resolver estas ecuaciones, se utiliza un cambio de variable que permite transformar la ecuación en una que se puede resolver por separación de variables. Solución general: La solución general de una ecuación diferencial homogénea suele expresarse en términos de una función implícita.

Como nociones previas debe saber que una función $f(x, y)$ es homogénea de grado “ n ” si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

a) $f(x, y) = x^2 - xy$ Es homogénea de grado “2” $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y)$ $= \lambda^2 x^2 - \lambda^2 xy$ $= \lambda^2 (x^2 - xy)$ $= \lambda^2 f(x, y)$	b) $f(x, y) = \frac{xy}{x+y^2}$ No es homogénea ya que: $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x) + (\lambda y)^2}$ $= \frac{\lambda^2 xy}{\lambda x + \lambda^2 y^2}$ No se puede extraer “λ”
c) $f(x, y) = x + y \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ Es homogénea de grado “1” $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y \cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)$ $= \lambda x - \lambda y \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ $= \lambda \left(x + y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right)$ $= \lambda^1 f(x, y)$	d) $f(x, y) = \ln x - \ln y$ Es homogénea ya que: $f(\lambda x, \lambda y) = \ln \lambda x - \ln \lambda y$ $= \ln\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)$ $= \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ $= \ln x - \ln y$ $= \lambda^0 f(x, y)$

Ahora si ; una vez que usted reconozca que la ecuación es homogénea usted hará el cambio de variable:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

Con lo cual hará que cualquier ecuación homogénea se transforme a separación de variables.

Como paso final se sustituye:

$$v = \frac{y}{x}$$

Ejercicio 1. Resolver la ecuación diferencial.

$$2xydy + (x^2 - y^2)dx = 0$$

Solución. Notamos que es una ecuación homogénea de grado 2.

Método 1

Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

$$2x(vx)[vdx + xdv] + (x^2 - (vx)^2)dx = 0$$

$$2x^2v[vdx + xdv] + (x^2 - v^2x^2)dx = 0$$

$$2x^2v^2dx + 2x^3v dv + x^2dx - x^2v^2dx = 0$$

$$x^2(v^2 + 1)dx + 2x^3v dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v}{v^2 + 1} dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2v}{v^2 + 1} dv = 0$$

$$\ln x + \ln|v^2 + 1| = C_1$$

$$\ln[x \cdot (v^2 + 1)] = \ln C$$

$$x(v^2 + 1) = C; \text{ sin embargo } v = \frac{y}{x}$$

$$x \cdot \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = C \Rightarrow x \cdot \left(\frac{y^2 + x^2}{x^2} \right) = C$$

$$y^2 + x^2 = Cx$$

Método 2.

$$2xydy + (x^2 - y^2)dx = 0$$

$$2xydy = (y^2 - x^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2 - x^2)}{2xy}$$

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2x^2 - x^2}{2xux}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u} - u$$

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{(u^2 + 1)}{2u}$$

$$\int \frac{2u}{u^2 + 1} du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln x + C_1$$

$$\ln(u^2 + 1) + \ln x = C_1$$

$$\ln[(u^2 + 1) \cdot x] = \ln C$$

$$(u^2 + 1) \cdot x = C$$

Realizamos el cambio $u = \frac{y}{x}$

$$\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) \cdot x = C$$

$$\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right) \cdot x = C$$

$$y^2 + x^2 = Cx$$

Ejercicio 2. Resolver la ecuación diferencial.

$$xy^2dy + (x^3 - y^3)dx = 0$$

Solución.

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 3. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

$$x(vx)^2[vdx + xdv] + (x^3 - (vx)^3)dx = 0$$

$$x^3 v^2 [v dx + x dv] + (x^3 - v^3 x^3) dx = 0$$

$$x^4 v^2 dv + x^3 v^3 dx + x^3 dx - x^3 v^3 dx = 0$$

$$x^4 v^2 dv + x^3 dx = 0$$

$$v^2 dv + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int v^2 dv + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{v^3}{3} + \ln x = c$$

$$v^3 + 3 \ln x = c$$

$$v^3 = c - 3 \ln x$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = c - 3 \ln x$$

$$y^3 = cx^3 - 3x^3 \ln x$$

Ejercicio 3. Resolver la ecuación diferencial.

$$x dy = (y + \sqrt{y^2 - x^2}) dx$$

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y + \sqrt{y^2 - x^2})}{x}$$

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{(ux + \sqrt{u^2 x^2 - x^2})}{x}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{u^2 - 1}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) = \ln x + \overset{C_1}{\widehat{\ln C}}$$

$$\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) = \ln x C$$

$$u + \sqrt{u^2 - 1} = xC$$

Realizamos el cambio $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = xC$$

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{x} = xC$$

$$y + \sqrt{y^2 - 1} = x^2C$$

Ejercicio 4.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\left[x \operatorname{sen} \left(\frac{y}{x} \right) - y \cos \left(\frac{y}{x} \right) \right] dx + x \cos \left(\frac{y}{x} \right) dy = 0$$

Solución.

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 3. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

$$[x \operatorname{sen}(v) - vx \cos(v)]dx + x \cos(v)[vdx + xdv] = 0$$

$$x \operatorname{sen}(v)dx - vx \cos(v)dx + xv \cos(v)dx + x^2 \cos(v)dv = 0$$

$$x \operatorname{sen}(v)dx + x^2 \cos(v)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\cos(v)dv}{\operatorname{sen}(v)} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\cos(v)dv}{\operatorname{sen}(v)} = 0$$

$$\ln x + \ln \operatorname{sen} v = C_1$$

$$\ln x \operatorname{sen} v = \ln c$$

$$x \operatorname{sen} v = c$$

$$x \operatorname{sen} \frac{y}{x} = c$$

Ejercicio 5.

Resolver la ecuación diferencial.

$$3xydx = [4x^2 - y^2]dy$$

Solución.

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 2.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[4x^2 - y^2]}{3xy}$$

Por lo cual hacemos la sustitución.

$$x = vy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{[4v^2y^2 - y^2]}{3vy}$$

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{[4v^2 - 1]}{3v}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{[v^2 - 1]}{3v}$$

$$\int \frac{3v}{v^2 - 1} dv = \int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{3}{2} \ln(v^2 - 1) = \ln y + \ln C$$

$$\ln(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = \ln(yC)$$

$$(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = yC$$

Realizamos el cambio $v = \frac{x}{y}$

$$\left(\left[\frac{x}{y} \right]^2 - 1 \right)^{\frac{3}{2}} = yC \Rightarrow \left(\frac{x^2 - y^2}{y^2} \right)^{\frac{3}{2}} = yC$$

Ejercicio 6.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación:

$$x^2 dy = (x^2 + xy + y^2) dx$$

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 2. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = xdv + vdx$$

$$x^2(xdv + vdx) = (x^2 + x(vx) + (vx)^2)dx$$

$$x^3 dv + vx^2 dx = x^2 dx + x^2 v dx + (vx)^2 dx$$

$$\frac{dv}{1 + v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{1 + v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\arctg v = \ln |x| + C_1$$

$$\arctg v = \ln |x| + \ln |C|$$

$$\arctg v = \ln |xC|$$

$$e^{\arctg v} = xC$$

$$e^{\arctg(\frac{y}{x})} = xC$$

Ejercicio 7. Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación:

$$\frac{xdy}{dx} = x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + y$$

$$xdy = \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + y \right] dx$$

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 1. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = xdv + vdx$$

$$x(xdv + vdx) = [x \operatorname{sen}(v) + vx] dx$$

$$x^2 dv + vxdx = x \operatorname{sen}(v) dx + vxdx$$

$$x^2 dv = x \operatorname{sen}(v) dx$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{\operatorname{sen} v} &= \frac{dx}{x} \\ \int \operatorname{csc} v dv &= \int \frac{dx}{x} \\ \operatorname{Ln} |\operatorname{csc} v - \operatorname{ctg} v| &= \operatorname{Ln} |x| + \underbrace{C_1}_{\operatorname{Ln} C} \\ \operatorname{Ln} |\operatorname{csc} v - \operatorname{ctg} v| &= \operatorname{Ln} |xC| \\ \operatorname{csc} v - \operatorname{ctg} v &= xC \\ \operatorname{csc} \left(\frac{y}{x} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{y}{x} \right) &= xC\end{aligned}$$

Método 2. $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}u + x \frac{du}{dx} &= \operatorname{sen} u + u \\ \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} &= \int \frac{dx}{x} \\ \operatorname{Ln}(\operatorname{csc} u - \operatorname{ctg} u) &= \operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln} C \\ \operatorname{csc} u - \operatorname{ctg} u &= xC \\ \operatorname{csc} \left(\frac{y}{x} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{y}{x} \right) &= xC\end{aligned}$$

Ejercicio 8.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + xe^{-\frac{y}{x}}}{x}$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación:

$$xdy = \left(y + xe^{-\frac{y}{x}} \right) dx$$

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 2. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$\begin{aligned}y &= vx \Rightarrow dy = xdv + vdx \\ x(xdv + vdx) &= (vx + xe^{-v})dx \\ x^2 dv + vxdx &= vxdx + xe^{-v}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 dv &= x e^{-v} dx \\
\frac{dv}{e^{-v}} &= \frac{dx}{x} \\
\int e^v dv &= \int \frac{dx}{x} \\
e^v &= \ln |x| + \ln |C| \\
e^v &= \ln |xC| \\
\frac{v}{e^x} &= \ln |xC|
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación:

$$-xydy = (x^2 + y^2)dx$$

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 2. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$\begin{aligned}
y &= vx \Rightarrow dy = xdv + vdx \\
-x(vx)(xdv + vdx) &= (x^2 + (vx)^2)dx \\
-vx^3dv - v^2x^2dx &= x^2dx + v^2x^2dx \\
-vx^3dv &= x^2(1 + 2v^2)dx \\
\frac{dv}{(1 + 2v^2)} &= \frac{-dx}{x} \\
\int \frac{-dv}{(1 + 2v^2)} &= \int \frac{dx}{x} \\
-\frac{1}{4} \ln |1 + 2v^2| &= \ln |x| + \ln |C|
\end{aligned}$$

falta dar otra forma o valor de frontera

$$y(1) = 2$$

Ejercicio 10.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3xy - 5x^2}{x^2}$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación:

$$x^2 dy = (y^2 - 3xy - 5x^2) dx$$

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 2. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = xdv + vdx$$

$$x^2(xdv + vdx) = ((vx)^2 - 3x(vx) - 5x^2)dx$$

Desarrollando y reduciendo la expresión.

$$x^3 dv = x^2(v^2 - 4v - 5)dx$$

$$\frac{dv}{v^2 - 4v - 5} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{(v-2)^2 - 3^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{6} \ln \left| \frac{v-2-3}{v-2+3} \right| = \ln |x| + C_1$$

$$\frac{1}{6} \ln \left| \frac{v-5}{v+1} \right| = \ln |x| + \ln |C|$$

$$\ln \left| \frac{\frac{y}{x} - 5}{\frac{y}{x} + 1} \right| = 6 \ln |xC|$$

$$\ln \left| \frac{y-5x}{y+x} \right| = \ln |(xC)^6|$$

$$\frac{y-5x}{y+x} = x^6 C$$

Ejercicio 11.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^3 - x^3}{3xy^2}$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación:

$$3xy^2 dy = (3y^3 - x^3) dx$$

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 3. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = xdv + vdx$$

$$3x(vx)^2(xdv + vdx) = (3(vx)^3 - x^3)dx$$

$$3v^2x^4dv + 3v^3x^3dx = 3v^3x^3dx - x^3dx$$

$$3v^2dv = \frac{-dx}{x}$$

$$3 \int v^2 dv = - \int \frac{dx}{x}$$

$$v^3 = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$e^{v^3} = \frac{C}{x}$$

$$e^{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = \frac{C}{x}$$

Ejercicio 12.

Resolver la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \sec\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación:

$$\frac{xdy}{dx} = x \sec\left(\frac{y}{x}\right) + y$$

$$xdy = \left[x \sec\left(\frac{y}{x}\right) + y \right] dx$$

Notamos que es una ecuación homogénea de grado 1. Por lo cual hacemos la sustitución.

$$y = vx \Rightarrow dy = xdv + vdx$$

$$x(xdv + vdx) = [x\sec(v) + vx]dx$$

$$x^2dv + vxdx = x\sec(v)dx + vxdx$$

$$x^2dv = x\sec(v)dx$$

$$\frac{dv}{\sec v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \cos v dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{sen } v = \text{Ln } |x| + \underbrace{C_1}_{\text{Ln } C}$$

$$\text{sen } v = \text{Ln } |xC|$$

$$\text{sen} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{Ln } |xC|$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$1. -4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$$

$$\text{Rpta. } (x + y)(x^3 + y^3) = C$$

$$2. -xy' = 2x + 3y$$

$$\text{Rpta. } y = cx^3 - x$$

$$3. -xy' = \sqrt{y - x^2}$$

$$\text{Rpta. } y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^3 e^{\frac{y(y + \sqrt{y^2 - x^2})}{x^2}}$$

$$4. -y' = \frac{y}{x} + \sec^2 \frac{y}{x}$$

$$\text{Rpta. } \frac{2y}{x} + \text{sen} \frac{2y}{x} = 4\text{Ln} x + C$$

$$5. -(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^3 - 3xy^2 = C + \text{sen} \frac{2y}{x} = 4\text{Ln} x + C$$

$$6. -\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 5xy - 2y^2}{6x^2 - 8xy + y^2}$$

$$\text{Rpta. } (y - x)(y - 3x)^9 = C(y - 2x)^{12}$$

$$7. -(x^2 - y^2)dx - \frac{2y^3}{x}dy = 0$$

$$\textbf{Rpta.} x^2(2y^2 - x^2)(y^2 + x^2)^2 = C$$

$$8. -\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$$

$$\textbf{Rpta.} x + \sqrt{x^2 - y^2} = C$$

$$9. -(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$$

$$\textbf{Rpta.} xe^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = C$$

$$10. -(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0$$

$$\textbf{Rpta.} y = x\sqrt[3]{3\ln Cx}$$

$$11. -2x^2ydx - (3x^3 + y^3)dy = 0$$

$$\textbf{Rpta.} (x^3 + y^3)^2 = cx^9$$

$$12. -\left(\sqrt{x^2 - y^2} - \arcsen\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\arcsen\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$\textbf{Rpta.} \ln x + \frac{1}{2}\arcsen\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

Otros tipos de sustitución

Son ejercicios donde realizamos determinados procedimientos, para transformar a variables separables o ecuaciones homogéneas

Sandia 1.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{(x-y)^2}$$

Solución

Aquí haremos cambio de variable.

$$u = x - y \Rightarrow du = dx - dy$$

De aquí: $dy = dx - du$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{dx - du}{dx} &= 1 + \frac{1}{u^2} \\ \frac{dx - du}{dx} &= \frac{u^2 + 1}{u^2} \\ u^2 dx - u^2 du &= u^2 dx + dx \\ -u^2 du &= dx \\ -\int u^2 du &= \int dx \\ -\frac{u^3}{3} &= x + C \\ -u^3 = 3x + C &\Rightarrow C = 3x + u^3 \\ C &= 3x + (x-y)^3\end{aligned}$$

Sandia 2.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = (3x + y)^2 - 3$$

Solución

Aquí haremos cambio de variable.

$$u = 3x + y \Rightarrow du = 3dx + dy$$

De aquí: $dy = du - 3dx$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + y)^2 - 3$$

$$\frac{du - 3dx}{dx} = u^2 - 3$$

$$du - 3dx = u^2 dx - 3dx$$

$$du = u^2 dx$$

$$\frac{du}{u^2} = dx$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{u} = x + C$$

$$C = x - \frac{1}{u}$$

$$C = x - \frac{1}{3x + y}$$

Sandia 3.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \text{Sen}^2(x - y)$$

Solución

$$u = x - y \Rightarrow du = dx - dy$$

De aquí: $dy = dx - du$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Sen}^2(x - y)$$

$$\frac{dx - du}{dx} = \text{Sen}^2 u$$

$$dx - du = \text{Sen}^2 u dx \Rightarrow (1 - \text{Sen}^2 u) dx = du$$

$$\text{Cos}^2 u dx = du$$

$$dx = \text{Sec}^2 u du$$

$$\int dx = \int \sec^2 u du$$

$$x = \operatorname{tg} u + C$$

$$x = \operatorname{tg}(x - y) + C$$

Sandia 4.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + y - 2$$

Solución

Aquí haremos cambio de variable.

$$u = 5x + y - 2 \Rightarrow du = 5dx + dy$$

De aquí: $dy = du - 5dx$

$$\frac{dy}{dx} = 5x + y - 2$$

$$\frac{du - 5dx}{dx} = u$$

$$du - 5dx = udx$$

$$du = (u + 5)dx$$

$$\frac{du}{u + 5} = dx$$

$$\int \frac{du}{u + 5} = \int dx$$

$$\operatorname{Ln}|u + 5| + \operatorname{Ln} C = x$$

$$\operatorname{Ln}|C(u + 5)| = x$$

$$C(u + 5) = e^x$$

Sandia 5.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^3 + y}$$

Solución

$$u = x^3 + y \Rightarrow du = 3x^2 dx + dy$$

De aquí: $3x^2 dx = du - dy$ desarrollamos.

$$(x^3 + y)dy = x^2 dx \Rightarrow (x^3 + y)dy = \frac{3x^2 dx}{3}$$

$$udy = \frac{du - dy}{3}$$

$$3udy = du - dy \Rightarrow 3udy + dy = du$$

$$(3u + 1)dy = du$$

$$dy = \frac{du}{3u + 1} \Rightarrow \int dy = \int \frac{du}{3u + 1}$$

$$y = \frac{1}{3} \ln|3u + 1| + \ln C$$

$$3y = \ln|C(3u + 1)|$$

$$e^{3y} = C(3u + 1) \Rightarrow e^{3y} = C[3(x^3 + y) + 1]$$

$$e^{3y} = C[3x^3 + 3y + 1]$$

Sandia 6.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = e^x y^2 - 2e^{2x} y + e^{3x}$$

Solución

Desarrollamos de forma adecuada.

$$\frac{dy}{e^x dx} = y^2 - 2e^x y + e^{2x}$$

Aquí realizamos una sustitución adecuada.

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

Reemplazamos

$$\frac{dy}{du} = y^2 - 2uy + u^2$$

$$\frac{dy}{du} = (y - u)^2 \Rightarrow dy = (y - u)^2 du$$

$$z = y - u \Rightarrow dz = dy - du$$

$$dy = dz + du$$

$$dz + du = z^2 du \Rightarrow dz = (z^2 - 1) du$$

$$\frac{dz}{z^2 - 1} = du$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - 1} = \int du \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = u - \ln C$$

$$\ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + \ln C = 2u \Rightarrow \ln \left| C \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right| = 2u$$

$$C \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = e^{2u}$$

Reemplazamos: $z = y - u$

$$C \left(\frac{y-u-1}{y-u+1} \right) = e^{2u}$$

Reemplazamos: $u = e^x$

$$C \left(\frac{y-e^x-1}{y-e^x+1} \right) = e^{2e^x}$$

Sandia 7.

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} y} + \frac{\cos x \cos y}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

Solución

Desarrollamos la suma.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \operatorname{sen} x + \cos x \cos y}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x (\operatorname{sen} x + \cos y)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

$$u = \operatorname{sen} x + \cos y \Rightarrow du = \cos x dx - \operatorname{sen} y dy$$

De aquí: $\operatorname{sen} y dy = \cos x dx - du$ desarrollamos.

$$\operatorname{sen} y dy = \operatorname{ctg} x (\operatorname{sen} x + \cos y) dx$$

$$\text{Reemplazamos: } \cos x dx - du = \operatorname{ctg} x \cdot u \cdot dx$$

$$(\cos x)$$

Ecuaciones de la forma: $y \cdot f(x, y) dx + x g(x, y) dy = 0$

Para resolver este tipo de ejercicios se realiza la sustitución:

$$xy = z \Rightarrow y = \frac{z}{x} \text{ ademas } dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$$

Ejercicio 28. Resolver la ecuación diferencial.

$$(xy^2 + y)dx - (x^2y - x)dy = 0$$

Solución.

$$y(xy + 1)dx - x(xy - 1)dy = 0$$

Realizando el cambio de variable.

$$\begin{aligned} \frac{z}{x}(z+1)dx - x(z-1)\left[\frac{xdz - zdx}{x^2}\right] &= 0 \\ \frac{z^2}{x}dx + \frac{z}{x}dx + zdz - \frac{z^2}{x}dx - dz + \frac{z}{x}dx &= 0 \\ \frac{2z}{x}dx + (z-1)dz &= 0 \\ \frac{2z}{x}dx + (z-1)dz &= 0 \\ \frac{2dx}{x} + \frac{(z-1)}{z}dz &= 0 \\ 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{(z-1)}{z}dz &= 0 \\ 2\int\frac{dx}{x} + \int dz - \int\frac{1}{z}dz &= 0 \\ 2\ln x + z - \ln z &= C_1 \\ \ln x^2 - \ln z &= C_1 - z \\ \ln\frac{x^2}{z} &= \ln c - z \\ \frac{x^2}{z} &= c\mathbf{e}^{-z} \\ \frac{x^2}{xy} &= c\mathbf{e}^{-xy} \\ x &= cy\mathbf{e}^{-xy} \end{aligned}$$

Ejercicio 29. Resolver la ecuación diferencial.

$$y(1 + 2xy)dx - x(1 - xy)dy = 0$$

Solución. Realizando las sustituciones

$$\begin{aligned}\frac{z}{x}(1 + 2z)dx - x(1 - z)\left[\frac{xdz - zdx}{x^2}\right] &= 0 \\ \frac{z}{x}dx + \frac{2z^2}{x}dx - dz + \frac{z}{x}dx + zdz - \frac{z^2}{x}dx &= 0 \\ \frac{2z}{x}dx + \frac{z^2}{x}dx - dz + zdz &= 0 \\ \frac{z^2 + 2z}{x}dx + (z - 1)dz &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{(z - 1)dz}{z^2 + 2z} &= 0 \\ \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(z - 1)dz}{z(z + 2)} &= 0 \\ \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(z - 1)dz}{z(z + 2)} &= 0 \\ \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{-dz}{z} &= 0 \\ \ln x + \frac{3}{2} \ln(z + 2) - \frac{1}{2} \ln z &= C_1 \\ \ln x^2 + 3 \ln(z + 2) - \ln z &= C_1 \\ \ln x^2 + \ln(z + 2)^3 - \ln z &= \ln c \\ \ln \left[\frac{(x^2)(z + 2)^3}{z} \right] &= \ln c \\ \frac{(x^2)(z + 2)^3}{z} &= c \\ (x^2)(z + 2)^3 &= cz\end{aligned}$$

Realizamos el cambio de variable

$$\begin{aligned}x^2(xy + 2)^3 &= cxy \\ x(xy + 2)^3 &= cy\end{aligned}$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2(x + y)$$

$$\text{Rpta: } \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\tan(x + y)}{\sqrt{2}}\right) = x + C$$

$$\frac{dy}{dx} = (x - y)^3$$

$$\text{Rpta: } C - x = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{(x - y - 1)^2}{(2x - 2y + 1)^2 + 3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x - 2y + 1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + xy - x^2y^2)}{x^2 - x^3y}, \text{ sug: } u = xy$$

$$\text{Rpta: } 2\ln x + 2xy - x^2y^2 = C$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + y^4\sqrt{x^2y^4 + 1}}{2x}$$

$$\text{Rpta: } \sqrt{x^2y^4 + 1} = cy^2x^2 - 1$$

$$2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})dx + x^3dy = 0, \text{ sug: } z = x^2y$$

$$\text{Rpta: } x^2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})$$

Reducción a ecuaciones Homogéneas

Simplificación: Al reducir una ecuación a homogénea, estamos simplificando su estructura, lo que facilita encontrar la solución.

Método de solución específico: Las ecuaciones diferenciales homogéneas tienen un método de resolución característico, que consiste en hacer un cambio de variable adecuado.

Amplio rango de aplicaciones: Muchas ecuaciones diferenciales que encontramos en problemas de física, ingeniería y otras áreas pueden reducirse a homogéneas.

Ejercicio 1.

Resolver la ecuación diferencial.

$$2(xy^2 + 1)dy + y^3dx = 0$$

Solución. Realizamos la sustitución $u = xy^2$

$$du = y^2dx + 2xy dy \Rightarrow dy = \frac{du - y^2dx}{2xy}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$2(u + 1)\left(\frac{du - y^2dx}{2xy}\right) + y^3dx = 0$$

$$(u + 1)(du - y^2dx) + xy^2 \cdot y^2dx = 0$$

$$(u + 1)du - (u + 1)y^2dx + uy^2dx = 0$$

$$(u + 1)du - y^2dx = 0$$

$$(u + 1)du = \frac{u}{x}dx$$

$$\int \frac{u + 1}{u} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u + \ln u = \ln x + C$$

$$u + \ln \frac{u}{x} = C$$

$$xy^2 + \ln y^2 = C$$

Ejercicio 2. Resolver la ecuación diferencial.

$$(1 - x^2y)dy + 2xy^2dx = 0$$

Solución. Realizamos la sustitución $u = x^2y$

$$du = 2xy \, dx + x^2 \, dy \Rightarrow dy = \frac{du - 2xy \, dx}{x^2}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$(1 - u) \left(\frac{du - 2xy \, dx}{x^2} \right) + 2xy^2 \, dx = 0$$

$$(1 - u)(du - 2xy \, dx) + 2x^3y^2 \, dx = 0$$

$$(1 - u)du - (1 - u)2xy \, dx + 2uxy \, dx = 0$$

$$(1 - u)du + (2u - 1)2xy \, dx = 0$$

$$(2u - 1)2xy \, dx = (u - 1)du$$

$$\frac{2x^2y \, dx}{x} = \frac{(u - 1)du}{(2u - 1)}$$

$$\frac{2u \, dx}{x} = \frac{(u - 1)du}{(2u - 1)}$$

$$\int \frac{2 \, dx}{x} = \int \frac{(u - 1)du}{u(2u - 1)}$$

$$2\ln x + \ln C = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2u - 1} \right) du$$

$$2\ln(x \cdot C) = \ln u - \frac{1}{2} \ln(2u - 1)$$

$$4\ln(x \cdot C) = \ln \left(\frac{u^2}{2u - 1} \right)$$

$$(xC)^4 = \frac{u^2}{2u - 1}$$

$$x^4 C (2x^2y - 1) = (x^2y)^2$$

$$x^4 C (2x^2y - 1) = x^4 y^2$$

$$C(2x^2y - 1) = y^2$$

Ecuaciones Isobáricas

Ecuaciones Diferenciales Isobáricas: Una Conceptualización ¿Qué son las ecuaciones diferenciales isobáricas? Las ecuaciones diferenciales isobáricas son un tipo particular de ecuaciones diferenciales de primer orden que, aunque no son homogéneas en sí mismas, pueden transformarse en ecuaciones homogéneas a través de un cambio de variable adecuado. Esto las convierte en un tipo de ecuación diferencial reducible.

Características principales: Grado de homogeneidad: A diferencia de las ecuaciones homogéneas, en las isobáricas los términos no necesariamente tienen el mismo grado de homogeneidad. Sin embargo, existe una relación específica entre los grados de los términos.

Cambio de variable: La clave para resolver estas ecuaciones radica en encontrar un cambio de variable adecuado que permita transformar la ecuación en una homogénea. Este cambio de variable suele involucrar una traslación de las variables.

Solución: Una vez transformada la ecuación en una homogénea, se puede aplicar el método estándar para resolver ecuaciones homogéneas, que consiste en hacer un cambio de variable adicional y separar variables.

Ejercicio 3. Resolver la ecuación diferencial.

$$(y^4 - 3x^2)dy = -xydx$$

Solución.

Para este ejercicio se tiene que realizar otro tipo de sustitución.

$$\begin{aligned}y &= Z^\alpha \Rightarrow dy = \alpha Z^{\alpha-1} dz \\ [(Z^\alpha)^4 - 3x^2][\alpha Z^{\alpha-1} dz] &= -x(Z^\alpha) dx \\ * [Z^{4\alpha} - 3x^2][\alpha Z^{\alpha-1} dz] &= -xZ^\alpha dx \\ [Z^{5\alpha-1} - 3x^2 Z^{\alpha-1}]\alpha dz &= -xZ^\alpha dx\end{aligned}$$

Para ser homogénea $5\alpha - 1 = 2 + \alpha - 1 = 1 + \alpha$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2} \text{ Reemplazamos en “*” } y = Z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Z = y^2$$

$$\begin{aligned}
[Z^2 - 3x^2] \left[\frac{1}{2} Z^{-1} dz \right] &= -xZ^{\frac{1}{2}} dx \\
[Z^2 - 3x^2] dz &= -2xZ dx \\
x = vZ &\Rightarrow dx = Zdv + vdz \\
[Z^2 - 3(vZ)^2] dz &= -2(vZ)Z[Zdv + vdz] \\
Z^2 dz - 3v^2 Z^2 dz &= -2vZ^3 dv - 2v^2 Z^2 dz \\
Z^2 dz - v^2 Z^2 dz &= -2vZ^3 dv \\
(1 - v^2) Z^2 dz &= -2vZ^3 dv \\
(1 - v^2) dz &= -2vZ dv \\
\frac{dz}{Z} &= \frac{-2v dv}{1 - v^2} \\
\int \frac{dz}{Z} &= \int \frac{2v dv}{v^2 - 1} \\
\ln Z &= \ln(v^2 - 1) + \ln c \\
\ln Z &= \ln[c(v^2 - 1)] \\
Z &= c(v^2 - 1) \\
y^2 &= c \left(\left[\frac{x}{Z} \right]^2 - 1 \right) \\
y^2 &= c \left(\frac{x^2 - Z^2}{Z^2} \right) \\
y^2 &= c \left(\frac{x^2 - [y^2]^2}{[y^2]^2} \right) \\
y^6 &= c(x^2 - y^4)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Resolver la ecuación diferencial.

$$(x + y^3)dx + (3y^5 - 3y^2x)dy = 0$$

Solución.

Para este ejercicio se tiene que realizar otro tipo de sustitución.

$$\begin{aligned}
y &= Z^\alpha \Rightarrow dy = \alpha Z^{\alpha-1} dz \\
* (x + (Z^\alpha)^3)dx + (3(Z^\alpha)^5 - 3(Z^\alpha)^2x)(\alpha Z^{\alpha-1} dz) &= 0 \\
(x + Z^{3\alpha})dx + (3Z^{5\alpha} - 3Z^{2\alpha}x)(\alpha Z^{\alpha-1} dz) &= 0
\end{aligned}$$

$$(x + Z^{3\alpha})dx + (3Z^{6\alpha-1} - 3Z^{3\alpha-1}x)\alpha dz = 0$$

Para ser homogénea

$$1 = 3\alpha = 6\alpha - 1 = 3\alpha - 1 + 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{3} \text{ Reemplazamos en “*” } y = Z^{\frac{1}{3}} \Rightarrow Z = y^3$$

$$(x + Z^1)dx + (3Z^1 - 3x)\left(\frac{1}{3}\right)dz = 0$$

$$(x + Z)dx + (Z - x)dz = 0$$

$$x = vZ \Rightarrow dx = Zdv + vdz$$

$$(vZ + Z)(Zdv + vdz) + (Z - vZ)dz = 0$$

$$vZ^2dv + v^2Zdz + Z^2dv + vZdz + Zdz - vZdz = 0$$

$$vZ^2dv + Z^2dv + v^2Zdz + Zdz = 0$$

$$Z^2(v + 1)dv + Z(v^2 + 1)dz = 0$$

$$\frac{(v + 1)}{(v^2 + 1)}dv + \frac{dz}{Z} = 0$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2v}{(v^2 + 1)} + \int \frac{dv}{(v^2 + 1)} + \int \frac{dz}{Z} = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln|v^2 + 1| + \arctg v + \ln Z = C$$

$$v = \frac{x}{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{x}{Z} \right)^2 + 1 \right| + \arctg \frac{x}{Z} + \ln Z = C$$

$$Z = y^3 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{x}{y^3} \right)^2 + 1 \right| + \arctg \frac{x}{y^3} + \ln y^3 = C$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{y^6} + 1 \right| + \arctg \frac{x}{y^3} + \ln y^3 = C$$

Lineales, pero no homogéneas

Ejercicio 5. Resolver la ecuación diferencial.

$$(3x + 2y + 1)dx - (3x + 2y - 1)dy = 0$$

Solución.

Notar que por los números “1” y “-1” no son homogéneas.

Realizaremos la sustitución: $z = 3x + 2y \Rightarrow dz = 3dx + 2dy$ ó $dy = \frac{dz - 3dx}{2}$

$$(z + 1)dx - (z - 1) \left[\frac{dz - 3dx}{2} \right] = 0$$

$$2(z + 1)dx = (z - 1)(dz - 3dx)$$

$$2zdx + 2dx = zdz - 3zdx - dz + 3dx$$

$$5zdx - dx = zdz - dz$$

$$(5z - 1)dx = (z - 1)dz$$

$$dx = \frac{(z - 1)dz}{5z - 1}$$

$$\int dx = \int \frac{(z - 1)dz}{5z - 1}$$

$$\int dx = \int \left[\frac{1}{5} - \frac{4/5}{5z - 1} \right] dz$$

$$x = \frac{1}{5}z - \frac{4}{25} \ln(5z - 1) + c$$

$$\frac{25}{4}x = \frac{5}{4}z - \ln(5z - 1) + c$$

$$\frac{25}{4}x - \frac{5}{4}(3x + 2y) + \ln(5(3x + 2y) - 1) = c$$

$$\frac{25}{4}x - \frac{5}{4}(3x + 2y) + \ln(15x + 10y - 1) = c$$

Ejercicio 6.

Resolver la ecuación diferencial.

$$(2x + 2y - 1) + y'(x + y - 2) = 0$$

Solución.

$$[2(x + y) - 1] + \frac{dy}{dx}(x + y - 2) = 0$$

$$[2(x + y) - 1]dx + (x + y - 2)dy = 0$$

Notar que por los números “-1” y “-2” no son homogéneas.

Realizaremos la sustitución:

$$z = x + y \Rightarrow dz = dx + dy \text{ ó } dy = dz - dx$$

$$(2z - 1)dx + (z - 2)[dz - dx] = 0$$

$$2zdx - dx + zdz - 2dz - zdx + 2dx = 0$$

$$zdx + dx + zdz - 2dz = 0$$

$$(z + 1)dx + (z - 2)dz = 0$$

$$dx + \frac{(z - 2)}{(z + 1)}dz = 0$$

$$\int dx + \int \frac{(z - 2)}{(z + 1)}dz = 0$$

$$\int dx + \int dz - 3 \int \frac{dz}{(z + 1)} = 0$$

$$x + z - 3Ln|z + 1| = C$$

Reemplazando: $z = x + y$

$$x + x + y = 3LnC + 3Ln|x + y + 1|$$

$$\frac{2x + y}{3} = Ln|C(x + y + 1)|$$

$$e^{\frac{2x+y}{3}} = C(x + y + 1)$$

Ejercicio 7.

Resolver la ecuación diferencial.

$$(3y - 7x + 7)dx - (7y - 3x + 3)dy = 0$$

Solución. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3y - 7x + 7 = 0 \\ 7y - 3x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \wedge y = 0$$

Una vez encontrado los puntos de intersección hacemos la sustitución.

$$\begin{cases} x = \omega + 1 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = d\omega \\ dy = dz \end{cases}$$

$$[3(z) - 7(\omega + 1) + 7]d\omega - [7(z) - 3(\omega + 1) + 3]dz = 0$$

$$(3z - 7\omega)d\omega + (7z - 3\omega)dz = 0$$

Ahora siendo la ecuación homogénea realizamos la sustitución:

$$z = v\omega \Rightarrow dz = \omega dv + v d\omega$$

$$[3(v\omega) - 7\omega]d\omega + [7(v\omega) - 3\omega](\omega dv + v d\omega) = 0$$

$$3v\omega d\omega - 7\omega d\omega + 7v\omega^2 dv + 7v^2\omega d\omega - 3\omega^2 dv - 3v\omega d\omega = 0$$

$$7v^2\omega d\omega - 7\omega d\omega + 7v\omega^2 dv - 3\omega^2 dv = 0$$

$$(v^2 - 1)7\omega d\omega + (7v - 3)\omega^2 dv = 0$$

$$\frac{7\omega d\omega}{\omega^2} + \frac{(7v - 3)dv}{v^2 - 1} = 0$$

$$\int \frac{7d\omega}{\omega} + \int \frac{(7v - 3)dv}{v^2 - 1} = 0$$

$$7 \int \frac{d\omega}{\omega} + \frac{7}{2} \int \frac{2v dv}{v^2 - 1} - 3 \int \frac{dv}{v^2 - 1} = 0$$

$$7 \ln \omega + \frac{7}{2} \ln(v^2 - 1) - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{v - 1}{v + 1}\right) = C_1$$

$$7 \ln \omega + 2 \ln(v^2 - 1) + \frac{3}{2} \ln(v^2 - 1) - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{v - 1}{v + 1}\right) = C_1$$

$$7 \ln \omega + 2 \ln(v^2 - 1) + \frac{3}{2} \left[\ln(v^2 - 1) - \ln\left(\frac{v - 1}{v + 1}\right) \right] = C_1$$

$$7 \ln \omega + 2 \ln(v^2 - 1) + \frac{3}{2} \ln(v + 1)^2 = C_1$$

$$7 \ln \omega + 2 \ln(v^2 - 1) + 3 \ln(v + 1) = \ln c$$

$$7 \ln \omega + 2 \ln[(v + 1)(v - 1)] + 3 \ln(v + 1) = \ln c$$

$$7 \ln \omega + 2 \ln(v + 1) + 2 \ln(v - 1) + 3 \ln(v + 1) = \ln c$$

$$7 \ln \omega + 5 \ln(v + 1) + 2 \ln(v - 1) = \ln c$$

$$\ln \omega^7 + \ln(v + 1)^5 + \ln(v - 1)^2 = \ln c$$

$$\ln[(\omega^7)(v + 1)^5(v - 1)^2] = \ln c$$

$$\omega^7(v + 1)^5(v - 1)^2 = c$$

Realizamos el cambio de variable

$$\omega^7 \left(\frac{z}{\omega} + 1 \right)^5 \left(\frac{z}{\omega} - 1 \right)^2 = c$$

$$\omega^7 \left(\frac{z + \omega}{\omega} \right)^5 \left(\frac{z - \omega}{\omega} \right)^2 = c$$

$$\omega^7 \frac{(z + \omega)^5}{\omega^5} \frac{(z - \omega)^2}{\omega^2} = c$$

$$\omega^7 \frac{(z + \omega)^5}{\omega^5} \frac{(z - \omega)^2}{\omega^2} = c$$

$$(z + \omega)^5 (z - \omega)^2 = c$$

Realizamos el último cambio de variable.

$$y = z \wedge x = \omega + 1 \Rightarrow \omega = x - 1$$

$$(y + x - 1)^5 (y - x + 1)^2 = c$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

Otras sustituciones

$$1. -(x^2 y^2 + 1) dx + 2x^2 dy = 0$$

$$\text{sug. } (u = xy) \quad \text{Rpta. } \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{2} \ln x = C$$

$$2. -(x^2 y^2 + 1) y dx + (xy - 1)^2 x dy = 0$$

$$\text{sug. } (u = xy) \quad \text{Rpta. } C y^2 = e^{xy - \frac{1}{xy}}$$

Ecuaciones Isobáricas

$$3. -y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$$

$$\text{sug. } (y = z^\alpha) \quad \text{Rpta. } y^2 = x \ln ky^2$$

$$4. -(9x^2 y^2 - xy - 1) dx - x^2 dy = 0$$

$$\text{sug. } (y = z^\alpha) \quad \text{Rpta. } y = \frac{1 - Cx^6}{3x + 3x^7 C}$$

$$5. -(y^3 - x) dx + (3xy^2 + y^5) dy = 0$$

$$\text{sug. } (y = z^\alpha) \quad \text{Rpta. } y^6 + 6xy^3 - 3x^2 = C$$

Lineales, pero no homogéneas

6. $-(3x + y - 15)dx + (6x + 2y - 5)dy = 0$

Rpta. $5x - 2(3x + y) + 5\ln(3x + y) = C$

7. $-(2x + y - 1)dx + (x - 2y + 3)dy = 0$

Rpta. $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$

8. $-(4x + 3y - 11)dx + (2x + y - 5)dy = 0$

Rpta. $\left(\frac{y-1}{x-2} + 1\right)^{1/3} \left(\frac{y-1}{x-2} + 4\right)^{2/3} = \frac{C}{x-2}$

9. $-(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$

Rpta. $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$

10. $-(3y - 7x + 7)dx - (7y - 3x + 3)dy = 0$

Rpta. $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C$

11. $-(2x^2 + 3y^2 - 7)xdx - (3x^2 + 2y^2 - 8)ydy = 0$

sug: $u = x^2, v = y^2$

Rpta. $(x^2 - y^2 - 1)^5 = C(x^2 + y^2 - 3)$

Ecuaciones diferenciales Exactas

Una ecuación diferencial exacta es un tipo particular de ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se puede expresar en la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Para que la ecuación diferencial sea exacta se debe cumplir:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

En algunas ocasiones las ecuaciones exactas con una buena agrupación de términos se pueden integrar término a término.

Ejemplo: $xy^4 dx + (2x^2y^3 - y)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{(xy^4)}_M = 4xy^3 = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(2x^2y^3 - y)}_N = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Se puede multiplicar por 2 y agrupar de forma conveniente.

$$\underbrace{2xy^4 dx + 4x^2y^3 - 2ydy}_d(x^2y^4) = 0$$

Que es fácilmente integrable, de hecho, a este proceso lo denominamos resolución a golpe de vista.

El proceso para la resolución de ecuaciones exactas es la siguiente, sea $F(x, y) = C$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = M(x, y)dy + N(x, y)dx$$

Donde:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = M(x, y)dx \text{ y } F(x, y) = \int^x M(x, y)dx + \phi(y)$$

Donde $\int^x$ indica que la integración “y” se ha tratado como una constante y $\phi(y)$ es la constante (con respecto a “x”) de integración. Con lo cual.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int^x M(x, y)dx \right) + \frac{d\phi}{dy} = N(x, y)$$

De donde $\frac{d\phi}{dy} = \phi'(y)$, y por tanto, se puede hallar $\phi(y)$.

Ejercicio 1.-

Resuelva la ecuación diferencial.

$$x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$$

Solución. Desarrollamos la ecuación

$$\underbrace{(2x^3 + xy^2)}_M dx + \underbrace{(yx^2 + 2y^3)}_N dy = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Partimos de $M(x, y)$

$$F = \int^x (2x^3 + xy^2)dx + f(y)$$

$$F = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + f(y) \dots (I)$$

Una vez integrado la función, realizamos la derivada parcial con respecto a “y”

$$\frac{\partial F}{\partial y} = yx^2 + f'(y)$$

Por dato del problema tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = yx^2 + 2y^3$$

Igualamos

$$yx^2 + f'(y) = yx^2 + 2y^3$$
$$f'(y) = 2y^3$$

Seguido integramos

$$\int f'(y) = \int 2y^3 dy$$
$$f(y) = \frac{y^4}{2}$$

Reemplazamos en “I”

$$\therefore \frac{x^4}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{2} = c$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$$

Ejercicio 2.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^x (3x^2 - 2x - y)dx + f(y)$$

$$F = x^3 - x^2 - xy + f(y) \dots (*)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + f'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$-x + f'(y) = 2y - x + 3y^2$$

$$f'(y) = 2y + 3y^2$$

$$\int f'(y) = \int 2y + 3y^2 dy$$

$$f(y) = y^2 + y^3$$

Reemplazamos en (*)

$$\therefore x^3 - x^2 - xy + y^2 + y^3 = c$$

Ejercicio 3.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$\left(\sen y + y \sen x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

Solución.- Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y + \sen x \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y + \sen x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Para este caso partiremos de $N(x, y)$

$$F = \int^y \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy + g(x)$$

$$F = x \operatorname{sen} y - y \cos x + \ln y + g(x) \dots (I)$$

Derivamos con respecto a “x”

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + g'(x)$$

Por dato del problema:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}$$

Igualemos

$$\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + g'(x) = \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

Integramos

$$\int g'(x) = \int \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \ln x$$

Reemplazamos en “I”

$$x \operatorname{sen} y - y \cos x + \ln y + \ln x = c$$

$$x \operatorname{sen} y - y \cos x + \ln xy = c$$

Ejercicio 4.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x^2 - y)dx - xdy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^y (-x)dy + g(x)$$

$$F = -xy + g(x) \dots (*)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -y + g'(x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= N \\ -y + g'(x) &= x^2 - y \\ g'(x) &= x^2 \\ \int g'(x) &= \int x^2 dx \\ g(x) &= \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

Reemplazamos en (*)

$$\begin{aligned}\therefore -xy + \frac{x^3}{3} &= c \\ x^3 - 3xy &= c\end{aligned}$$

Ejercicio 5.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 2y \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\ F &= \int^x (x^2 + y^2)dx + f(y) \\ F &= \frac{x^3}{3} + xy^2 + f(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2xy + f'(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= N \\ 2xy + f'(y) &= 2xy \\ f'(y) &= 0\end{aligned}$$

$$\int f'(y) = \int 0 dy$$

$$f(y) = c$$

$$\therefore \frac{x^3}{3} + xy^2 = c$$

Ejercicio 6.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x + y \cos x) dx + \operatorname{sen} x dy = 0$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^x (x + y \cos x) dx + f(y)$$

$$F = \frac{x^2}{2} + y \operatorname{sen} x + f(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \operatorname{sen} x + f'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$\operatorname{sen} x + f'(y) = \operatorname{sen} x$$

$$f'(y) = 0$$

$$\int f'(y) = \int 0 dy$$

$$f(y) = c$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} + y \operatorname{sen} x = c$$

Ejercicio 7.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = 2e^{2\theta} = \frac{\partial N}{\partial \rho} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^{\rho} (1 + e^{2\theta})d\rho + f(\theta)$$

$$F = \rho + \rho e^{2\theta} + f(\theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 2\rho e^{2\theta} + f'(\theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = N$$

$$2\rho e^{2\theta} + f'(\theta) = 2\rho e^{2\theta}$$

$$f'(\theta) = 0$$

$$\int f'(\theta) = \int 0 d\rho$$

$$f(\theta) = c$$

$$\therefore \rho + \rho e^{2\theta} = c$$

Ejercicio 8.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^y (3x + 4y + 5)dy + f(x)$$

$$F = 3xy + 2y^2 + 5y + f(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3y + f'(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

$$3y + f'(x) = 2x + 3y + 4$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$\int f'(x) = \int 2x + 4 dx$$

$$f(x) = x^2 + 4x$$

$$\therefore 3xy + 2y^2 + 5y + x^2 + 4x = c$$

Ejercicio 9.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$\left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(3x^4y^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^x \left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}\right)dx + g(y)$$

$$F = x^4y^3 + \ln x + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^4y^2 + g'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$3x^4y^2 + g'(y) = 3x^4y^2 - \frac{1}{y}$$

$$g'(y) = -\frac{1}{y}$$

$$\int g'(y) = \int -\frac{1}{y} dy$$

$$g(y) = -\ln y$$

$$\therefore x^4y^3 + \ln x - \ln y = c$$

$$\therefore x^4y^3 + \ln \frac{x}{y} = c$$

Ejercicio 10.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x\sqrt{x^2 + y^2} - y) dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - x) dy = 0$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^x (x\sqrt{x^2 + y^2} - y) dx + g(y)$$

$$F = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - xy + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y\sqrt{x^2 + y^2} - x + g'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$y\sqrt{x^2 + y^2} - x + g'(y) = y\sqrt{x^2 + y^2} - x$$

$$g'(y) = 0$$

$$\int g'(y) = \int 0 dy$$

$$g(y) = c$$

$$\therefore \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - xy = c$$

Método adicional para resolver

Siendo: $M(x, y)dx + N(x, y) = 0$

La fórmula para resolver la ecuación diferencial exacta es:

$$\int_a^x M(x, y)dx + \int N(a, y)dy = C$$

Ejercicio 11.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x + y + 1)dx - (y - x + 3)dy = 0$$

Solución.

Resolviendo por el método tradicional.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F = \int^y (x - y - 3)dy + f(x)$$

$$F = xy - \frac{y^2}{2} - 3y + f(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + f'(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

$$y + f'(x) = x + y + 1$$

$$f'(x) = x + 1$$

$$\int f'(x) = \int x + 1 dx$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\therefore xy - \frac{y^2}{2} - 3y + \frac{x^2}{2} + x = c$$

Método 2.

Aplicamos la fórmula:

$$\int_a^x M(x, y) dx + \int N(a, y) dy = C$$

Para la segunda integral reemplazamos “a” en “x”

$$\int_a^x (x + y + 1) dx - \int (y - a + 3) dy = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + yx + x \right)_a^x - \left(\frac{y^2}{2} - ay + 3y \right) = C$$

$$\frac{x^2}{2} + yx + x - \left(\frac{a^2}{2} + ay + a \right) - \frac{y^2}{2} + ay - 3y = C$$

$$\frac{x^2}{2} + yx + x - \underbrace{\frac{a^2}{2}}_0 - ay - \underbrace{a}_0 - \frac{y^2}{2} + ay - 3y = C$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + yx + x - 3y = C$$

Si solo está la constante “a” esta se elimina.

Ejercicio 11.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(y \cos x + y^3) dx - (\sin x + 3xy^2) dy = 0$$

Solución

Aplicamos la fórmula:

$$\int_a^x M(x, y) dx + \int N(a, y) dy = C$$

Para la segunda integral reemplazamos “a” en “x”

$$\int_a^x (y \cos x + y^3) dx - \int (\sin(a) + 3ay^2) dy = 0$$

$$(y \sin x + xy^3)_a^x - (y \sin(a) + ay^3) = C$$

$$y \operatorname{sen} x + xy^3 - (y \operatorname{sen}(a) + (a)y^3) - y \operatorname{sen}(a) - ay^3 = C$$

$$y \operatorname{sen} x + xy^3 - y \operatorname{sen}(a) - (a)y^3 - y \operatorname{sen}(a) - ay^3 = C$$

$$y \operatorname{sen} x + xy^3 - y \underbrace{\operatorname{sen}(a)}_0 - \underbrace{(a)}_0 y^3 - y \underbrace{\operatorname{sen}(a)}_0 - \underbrace{a}_0 y^3 = C$$

$$y \operatorname{sen} x + xy^3 = C$$

Si solo está la constante “a” esta se elimina.

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

Resolver las ecuaciones diferenciales

1. $-x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$

Rpta. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$

2. $-(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

Rpta. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$

3. $-\left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx + \left(\frac{1}{y} + 2y\right)dy = 0$

Rpta. $xye^{x^2+y^2} = C$

4. $-(y^3 - 1)e^x dx + 3y^2(e^x + 1)dy = 0$

Rpta. $y^3e^x - e^x + y^3 = C$

5. $-(4x^3y^2 - 6x^2y - 2x - 3)dx + (2x^4y - 2x^3)dy = 0$

Rpta. $x^4y^2 - 2x^3y - x^2 - 3x = C$

6. $-(2xy + 2y^4)dx + (x^2 + 8xy^3 - 5)dy = 0$

Rpta. $x^2y + 2xy^4 - 5y = C$

7. $-(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$

Rpta. $x^4 + 6xy + y^2 - 2y = C$

Solución de ecuaciones diferenciales exactas a golpe de vista

Ejercicio 11.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$3x dx + 2dy = 0$$

Solución.

Aunque es una ecuación de variables separables rescatemos su principio de solución.

$$\int 3x dx + \int 2 dy = 0$$
$$\frac{3x^2}{2} + 2y = c$$

¿Lo notaste? Si tenemos un diferencial hecho su integral será inmediata.

Ejercicio 12.-Resuelva la ecuación diferencial.

$$3x(xy - 2)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$

Solución. Aquí se empezará a reconocer ciertos patrones en las ecuaciones diferenciales para una más rápida solución.

$$(3x^2y - 6x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$
$$3x^2y dx - 6x dx + x^3 dy + 2y dy = 0$$
$$3x^2y dx + x^3 dy + 2y dy - 6x dx = 0$$
$$\int d(x^3y) + \int 2y dy - \int 6x dx = \int 0$$
$$x^3y + y^2 - 3x^2 = c$$

Ejercicio 13.-Resuelva la ecuación diferencial.

$$e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$e^y dx + x e^y dy - 2y dy = 0$$

$$\int (x e^y) - \int 2y dy = \int 0$$

$$x e^y - y^2 = c$$

Ejercicio 14.-Resuelva la ecuación diferencial.

$$\sec^2 x t g y dx + \sec^2 y t g x dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sec^2 x \sec^2 y = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\int (t g x t g y) = \int 0$$

$$t g x t g y = c$$

Ejercicio 15.-Resuelva la ecuación diferencial.

$$(y^2 - 2xy + 6x)dx + (-x^2 + 2xy - 6)dy = 0$$

Solución. Aquí se empezara a reconocer ciertos patrones en las ecuaciones diferenciales para una más rápida solución.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 2x = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$y^2 dx - 2xy dx + 6x dx - x^2 dy + 2xy dy - 6 dy = 0$$

$$y^2 dx + 2xy dy - 2xy dx - x^2 dy + 6x dx - 6 dy = 0$$

$$y^2 dx + 2xy dy - (2xy dx + x^2 dy) + 6x dx - 6 dy = 0$$

$$\int d(xy^2) - \int d(x^2 y) + \int 6x dx - \int 6 dy = \int 0$$

$$xy^2 - x^2 y + 3x^2 - 6y = c$$

Ejercicio 16.-Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x^2 - x + y^2)dx + (-y e^y + 2xy)dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 2y = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\ x^2 dx - x dx + y^2 dx - y e^y dy + 2xy dy &= 0 \\ x^2 dx - x dx + 2xy dy + y^2 dx - y e^y dy &= 0 \\ \int x^2 dx - \int x dx + \int d(xy^2) - \int y e^y dy &= \int 0 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + xy^2 - [y e^y - e^y] &= c \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + xy^2 - y e^y + e^y &= c\end{aligned}$$

Ejercicio 17.-Resuelva la ecuación diferencial.

$$\frac{2xy-1}{y} dx + \frac{x+3y}{y^2} dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\ 2x dx - \frac{1 dx}{y} + \frac{x dy}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ 2x dx - \frac{y dx}{y^2} + \frac{x dy}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ 2x dx - \frac{y dx}{y^2} + \frac{x dy}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ 2x dx + \frac{x dy - y dx}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ \int 2x dx + \int d\left(\frac{x}{y}\right) + \int \frac{3}{y} dy &= \int 0 \\ x^2 + \frac{x}{y} + 3 \ln y &= c\end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales Inexactas

Si la ecuación no es exacta se podrá transformar a una ecuación exacta al multiplicar la ecuación original por un factor, este se puede obtener de 3 formas.

a) Si

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$

Para este caso el resultado es una función solo de “x”

Entonces $e^{\int f(x)dx}$ será un factor integrante.

b) Si

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y)$$

Para este caso el resultado es una función solo de “y”

Entonces $e^{\int g(y)dy}$ será un factor integrante.

c) Si la ecuación diferencial es homogénea y además:

$Mx + Ny \neq 0$, entonces $\frac{1}{Mx+Ny}$ es un factor integrante.

d) si la ecuacion diferencial se puede escribir como:

$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$, donde $f(xy) \neq g(xy)$

$\frac{1}{Mx-Ny}$ es un factor integrante

Ejercicio 1.

$$(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = 2x^2y + 2y + 5 \\ N = 2x^3 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2 + 2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2 + 2 \end{cases}$$

No es exacta, por lo cual buscamos su factor integrando, al desarrollar la resta resulta la variable “ x ”, entonces entra en el primer caso:

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^3 + 2x} [2x^2 + 2 - (6x^2 + 2)]$$

$$f(x) = \frac{-4x^2}{2x^3 + 2x} = \frac{-2x}{x^2 + 1}$$

$$u = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{-2x}{x^2+1}dx} = e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Multiplicamos el factor integrante a la ecuación:

$$\frac{(2y(x^2 + 1) + 5)}{x^2 + 1} dx + \frac{(2x(x^2 + 1))}{x^2 + 1} dy = 0$$

$$\left(2y + \frac{5}{x^2 + 1} \right) dx + 2xdy = 0$$

Siendo una ecuación exacta.

$$\underbrace{2ydx + 2xdy}_{d(2xy)} + \frac{5}{x^2 + 1} dx = 0$$

$$\int d(2xy) + 5 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = C$$

$$2xy + 5 \arctan(x) = C$$

Ejercicio 2.

$$(e^x + xe^y)dx + (xe^y)dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = e^x + xe^y \\ N = xe^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = xe^y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \end{cases}, \text{no es exacta}$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{xe^y} [xe^y - e^y] = \frac{e^y(x-1)}{xe^y} = \frac{x-1}{x}$$

$$u = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{x-1}{x} dx} = e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{e^x}{x} (e^x + xe^y) dx + \frac{e^x}{x} (xe^y) dy = 0$$

$$\left(\frac{e^{2x}}{x} + e^{x+y} \right) dx + e^{x+y} dy = 0$$

Siendo una ecuación exacta.

$$\underbrace{e^{x+y} dx + e^{x+y} dy}_{d(e^{x+y})} + \frac{e^{2x}}{x} dx = 0$$

$$\int d(e^{x+y}) + \int \frac{e^{2x}}{x} dx = C$$

$$e^{x+y} + \int_0^x \frac{e^{2t}}{t} dt = C$$

Ejercicio 3.

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = 2xy^2 - 3y^3 \\ N = 7 - 3xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2 \end{cases}$$

No es exacta, por lo cual buscamos su factor integrando, al desarrollar la resta puede reducirse a la variable “y”, entonces entra en el segundo caso:

$$g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$g(y) = \frac{1}{2xy^2 - 3y^3} [-3y^2 - (4xy - 9y^2)]$$

$$g(y) = \frac{6y^2 - 4xy}{y^2(2x - 3y)} = \frac{-2y(2x - 3y)}{y^2(2x - 3y)} = -\frac{2}{y}$$

$$u = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{-2}{y} dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicamos el factor integrante a la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2}(2xy^2 - 3y^3)dx + \frac{1}{y^2}(7 - 3xy^2)dy &= 0 \\ (2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy &= 0 \end{aligned}$$

Siendo una ecuación exacta.

$$2xdx - 3 \underbrace{(ydx + xdy)}_{d(xy)} + \frac{7}{y^2}dy = 0$$

$$\int 2xdx - 3 \int d(xy) + \int \frac{7}{y^2}dy = C$$

$$x^2 - 3xy - \frac{1}{y} = C$$

Ejercicio 4.

$$dx + \left[\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right]dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = \frac{x}{y} \\ N = \frac{x}{y} - \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y} \end{cases}, \text{no es exacta}$$

$$g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$g(y) = \frac{1}{1} \left[\frac{1}{y} - 0 \right] = \frac{1}{y}$$

$$u = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

$$ydx + y\left[\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right]dy = 0$$

$$ydx + (x - y\operatorname{sen} y)dy$$

Siendo una ecuación exacta.

$$\underbrace{ydx + xdy}_{d(xy)} - y\operatorname{sen} y dy = 0$$

$$\int d(xy) + \int y\operatorname{sen} y dy = C$$

$$xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = C$$

Ejercicio 5.

$$(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = x^4 + y^4 \\ N = xy^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 \end{cases}, \text{ no es exacta}$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{1}{xy^3} [4y^3 - y^3] = \frac{3y^3}{xy^3}$$

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$u = e^{\int g(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \operatorname{Ln} x} = x^3$$

Al ser una ecuación homogénea, podemos escoger el siguiente factor integrante:

$$\mu = \frac{1}{(x^4 + y^4)x - (xy^3)y}$$

$$\mu = \frac{1}{x^5 + xy^4 - xy^4}$$

$$\mu = \frac{1}{x^5}$$

Multiplicamos:

$$\frac{1}{x^5} \cdot (x^4 + y^4)dx - \frac{1}{x^5} \cdot xy^3dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + \underbrace{\frac{y^4}{x^5}dx - \frac{y^3}{x^4}dy}_{d\left(\frac{1}{4} \times \frac{y^4}{x^4}\right)} = 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int d\left(\frac{1}{4} \times \frac{y^4}{x^4}\right) = C$$

$$\ln x + \frac{y^4}{4x^4} = C$$

De esta pregunta entendemos que hay muchos tipos de factor integrante.

Ejercicio 6.

$$y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$$

Solución.

$$\mu = \frac{1}{y(2xy + 1) \cdot x - x(1 + 2xy - x^3y^3) \cdot y}$$

$$\mu = \frac{1}{2x^2y^2 + xy - xy - 2x^2y^2 + x^4y^4}$$

$$\mu = \frac{1}{x^4y^4}$$

Multipliquemos:

$$\frac{1}{x^4y^4} \cdot y(2xy + 1)dx + \frac{1}{x^4y^4} \cdot x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$$

$$\left(\frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x^4y^3}\right)dx + \left(\frac{1}{x^3y^4} + \frac{2}{x^2y^3} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$\underbrace{\frac{2dx}{x^3y^2} + \frac{2dy}{x^2y^3}}_{d\left(\frac{-1}{x^2y^2}\right)} + \underbrace{\frac{dx}{x^4y^3} + \frac{dy}{x^3y^4}}_{d\left(\frac{-1}{3x^3y^3}\right)} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int d\left(\frac{-1}{x^2y^2}\right) + \int d\left(\frac{-1}{3 \cdot x^3y^3}\right) - \int \frac{dy}{y} = C$$

$$-\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{3x^3y^3} - \ln y = C$$

Solución de ecuaciones diferenciales exactas a golpe de vista

Ejercicio 11.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$3x dx + 2dy = 0$$

Solución.

Aunque es una ecuación de variables separables rescatemos su principio de solución.

$$\int 3x dx + \int 2 dy = 0$$

$$\frac{3x^2}{2} + 2y = c$$

¿Lo notaste? Si tenemos un diferencial hecho su integral será inmediata.

Ejercicio 12.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$3x(xy - 2)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$

Solución. Aquí se empezará a reconocer ciertos patrones en las ecuaciones diferenciales para una más rápida solución.

$$(3x^2y - 6x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$

$$\begin{aligned}
3x^2ydx - 6xdx + x^3dy + 2ydy &= 0 \\
3x^2ydx + x^3dy + 2ydy - 6xdx &= 0 \\
\int d(x^3y) + \int 2ydy - \int 6xdx &= \int 0 \\
x^3y + y^2 - 3x^2 &= c
\end{aligned}$$

Ejercicio 13.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\
e^y dx + xe^y dy - 2ydy &= 0 \\
\int (xe^y) - \int 2ydy &= \int 0 \\
xe^y - y^2 &= c
\end{aligned}$$

Ejercicio 14.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$sec^2xtgydx + sec^2ytgxdy = 0$$

Solución.

Desarrollamos la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} = sec^2xsec^2y &= \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\
\int (tgxtgy) &= \int 0 \\
tgxtgy &= c
\end{aligned}$$

Ejercicio 15.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(y^2 - 2xy + 6x)dx + (-x^2 + 2xy - 6)dy = 0$$

Solución. Aquí se empezara a reconocer ciertos patrones en las ecuaciones diferenciales para una más rápida solución.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 2x = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$y^2 dx - 2xy dx + 6x dx - x^2 dy + 2xy dy - 6 dy = 0$$

$$y^2 dx + 2xy dy - 2xy dx - x^2 dy + 6x dx - 6 dy = 0$$

$$y^2 dx + 2xy dy - (2xy dx + x^2 dy) + 6x dx - 6 dy = 0$$

$$\int d(xy^2) - \int d(x^2 y) + \int 6x dx - \int 6 dy = \int 0$$

$$xy^2 - x^2 y + 3x^2 - 6y = c$$

Ejercicio 16.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x^2 - x + y^2)dx + (-ye^y + 2xy)dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$x^2 dx - x dx + y^2 dx - ye^y dy + 2xy dy = 0$$

$$x^2 dx - x dx + 2xy dy + y^2 dx - ye^y dy = 0$$

$$\int x^2 dx - \int x dx + \int d(xy^2) - \int ye^y dy = \int 0$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + xy^2 - [ye^y - e^y] = c$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + xy^2 - ye^y + e^y = c$$

Ejercicio 17.-Resuelva la ecuación diferencial.

$$\frac{2xy - 1}{y} dx + \frac{x + 3y}{y^2} dy = 0$$

Solución. - Desarrollamos la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\ 2x dx - \frac{1 dx}{y} + \frac{x dy}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ 2x dx - \frac{y dx}{y^2} + \frac{x dy}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ 2x dx - \frac{y dx}{y^2} + \frac{x dy}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ 2x dx + \frac{x dy - y dx}{y^2} + \frac{3}{y} dy &= 0 \\ \int 2x dx + \int d\left(\frac{x}{y}\right) + \int \frac{3}{y} dy &= \int 0 \\ x^2 + \frac{x}{y} + 3 \ln y &= c\end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales Inexactas

Si la ecuación no es exacta se podrá transformar a una ecuación exacta al multiplicar la ecuación original por un factor, este se puede obtener de 3 formas.

a) Si

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$

Para este caso el resultado es una función solo de “x”

Entonces $e^{\int f(x) dx}$ será un factor integrante.

b) Si

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y)$$

Para este caso el resultado es una función solo de “y”

Entonces $e^{\int g(y)dy}$ será un factor integrante.

c) Si la ecuación diferencial es homogénea y además:

$Mx + Ny \neq 0$, entonces $\frac{1}{Mx+Ny}$ es un factor integrante.

d) si la ecuación diferencial se puede escribir como:

$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$, donde $f(xy) \neq g(xy)$

$\frac{1}{Mx-Ny}$ es un factor integrante

Ejercicio 1.

$$(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = 2x^2y + 2y + 5 \\ N = 2x^3 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2 + 2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2 + 2 \end{cases}$$

No es exacta, por lo cual buscamos su factor integrando, al desarrollar la resta resulta la variable “x”, entonces entra en el primer caso:

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^3 + 2x} [2x^2 + 2 - (6x^2 + 2)]$$

$$f(x) = \frac{-4x^2}{2x^3 + 2x} = \frac{-2x}{x^2 + 1}$$

$$u = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{-2x}{x^2+1}dx} = e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Multiplicamos el factor integrante a la ecuación:

$$\frac{(2y(x^2 + 1) + 5)}{x^2 + 1} dx + \frac{(2x(x^2 + 1))}{x^2 + 1} dy = 0$$

$$\left(2y + \frac{5}{x^2 + 1}\right) dx + 2x dy = 0$$

Siendo una ecuación exacta.

$$\underbrace{2y dx + 2x dy}_{d(2xy)} + \frac{5}{x^2 + 1} dx = 0$$

$$\int d(2xy) + 5 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = C$$

$$2xy + 5 \arctan(x) = C$$

Ejercicio 2.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(e^x + xe^y)dx + (xe^y)dy = 0$$

Solución.

Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = e^x + xe^y \\ N = xe^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = xe^y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \end{cases}, \text{no es exacta}$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{xe^y} [xe^y - e^y] = \frac{e^y(x - 1)}{xe^y} = \frac{x - 1}{x}$$

$$u = e^{\int f(x) dx} = e^{\int \frac{x-1}{x} dx} = e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{e^x}{x} (e^x + xe^y) dx + \frac{e^x}{x} (xe^y) dy = 0$$

$$\left(\frac{e^{2x}}{x} + e^{x+y} \right) dx + e^{x+y} dy = 0$$

Siendo una ecuación exacta.

$$\underbrace{e^{x+y}dx + e^{x+y}dy}_{d(e^{x+y})} + \frac{e^{2x}}{x}dx = 0$$

$$\int d(e^{x+y}) + \int \frac{e^{2x}}{x}dx = C$$

$$e^{x+y} + \int_0^x \frac{e^{2t}}{t}dt = C$$

Ejercicio 3.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = 2xy^2 - 3y^3 \\ N = 7 - 3xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2 \end{cases}$$

No es exacta, por lo cual buscamos su factor integrando, al desarrollar la resta puede reducirse a la variable “y”, entonces entra en el segundo caso:

$$g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$g(y) = \frac{1}{2xy^2 - 3y^3} [-3y^2 - (4xy - 9y^2)]$$

$$g(y) = \frac{6y^2 - 4xy}{y^2(2x - 3y)} = \frac{-2y(2x - 3y)}{y^2(2x - 3y)} = -\frac{2}{y}$$

$$u = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{-2}{y}dx} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicamos el factor integrante a la ecuación:

$$\frac{1}{y^2} (2xy^2 - 3y^3)dx + \frac{1}{y^2} (7 - 3xy^2)dy = 0$$

$$(2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0$$

Siendo una ecuación exacta.

$$2x dx - 3 \underbrace{(y dx + x dy)}_{d(xy)} + \frac{7}{y^2} dy = 0$$

$$\int 2x dx - 3 \int d(xy) + \int \frac{7}{y^2} dy = C$$

$$x^2 - 3xy - \frac{1}{y} = C$$

Ejercicio 4.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$dx + \left[\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right] dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = 1 \\ N = \frac{x}{y} - \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y} \end{cases}, \text{no es exacta}$$

$$g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$g(y) = \frac{1}{1} \left[\frac{1}{y} - 0 \right] = \frac{1}{y}$$

$$u = e^{\int g(y) dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\operatorname{Ln} y} = y$$

$$y dx + y \left[\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y \right] dy = 0$$

$$y dx + (x - y \operatorname{sen} y) dy$$

Siendo una ecuación exacta.

$$\underbrace{y dx + x dy}_{d(xy)} - y \operatorname{sen} y dy = 0$$

$$\int d(xy) + \int y \operatorname{sen} y dy = C$$

$$xy + y \cos y - \operatorname{sen} y = C$$

Ejercicio 5.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$(x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0$$

Solución. Realizamos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} M = x^4 + y^4 \\ N = xy^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 \end{cases}, \text{ no es exacta}$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{1}{xy^3} [4y^3 - y^3] = \frac{3y^3}{xy^3}$$

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$u = e^{\int g(x) dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3$$

Al ser una ecuación homogénea, podemos escoger el siguiente factor integrante:

$$\mu = \frac{1}{(x^4 + y^4)x - (xy^3)y}$$

$$\mu = \frac{1}{x^5 + xy^4 - xy^4}$$

$$\mu = \frac{1}{x^5}$$

Multiplicamos:

$$\frac{1}{x^5} \cdot (x^4 + y^4)dx - \frac{1}{x^5} \cdot xy^3 dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5} \right) dx - \frac{y^3}{x^4} dy = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + \underbrace{\frac{y^4}{x^5}dx - \frac{y^3}{x^4}dy}_{d\left(\frac{1}{4} \times \frac{y^4}{x^4}\right)} = 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int d\left(\frac{1}{4} \times \frac{y^4}{x^4}\right) = C$$

$$\ln x + \frac{y^4}{4x^4} = C$$

De esta pregunta entendemos que hay muchos tipos de factor integrante.

Ejercicio 6.

Resuelva la ecuación diferencial.

$$y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$$

Solución.

$$\mu = \frac{1}{y(2xy + 1) \cdot x - x(1 + 2xy - x^3y^3) \cdot y}$$

$$\mu = \frac{1}{2x^2y^2 + xy - xy - 2x^2y^2 + x^4y^4}$$

$$\mu = \frac{1}{x^4y^4}$$

Multiplicamos:

$$\frac{1}{x^4y^4} \cdot y(2xy + 1)dx + \frac{1}{x^4y^4} \cdot x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$$

$$\left(\frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x^4y^3}\right)dx + \left(\frac{1}{x^3y^4} + \frac{2}{x^2y^3} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$\underbrace{\frac{2dx}{x^3y^2} + \frac{2dy}{x^2y^3}}_{d\left(\frac{-1}{x^2y^2}\right)} + \underbrace{\frac{dx}{x^4y^3} + \frac{dy}{x^3y^4}}_{d\left(\frac{-1}{3x^3y^3}\right)} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int d\left(\frac{-1}{x^2y^2}\right) + \int d\left(\frac{-1}{3 \cdot x^3y^3}\right) - \int \frac{dy}{y} = C$$

$$-\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{3x^3y^3} - \ln y = C$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Se denominará ecuación diferencial lineal si es una ecuación de primer grado en una de sus variables y en su derivada, es decir es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \dots (*)$$

Es una ecuación diferencial lineal en y .

Una ecuación de esta forma:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

Es una ecuación diferencial lineal en x .

Para la solución de este tipo de problemas, el **factor integrante** de $(*)$ es de la forma:

$$e^{\int P(x)dx}$$

De aquí sacaremos que la primitiva es:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$$

Si lo hacemos con respecto a la variable “ y ”.

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \dots (*)$$

$$xe^{\int P(y)dy} = \int Q(y) \cdot e^{\int P(y)dy} dy + C$$

Como siempre esto lo tendremos más claro al momento de resolver un par de frutitas:

Manguito 1.-

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + x$$

Solución.

Por inspección la ecuación diferencial es lineal, ubicaremos los datos del ejercicio:

$$P(x) = 2 \quad y \quad Q(x) = x^2 + x$$

Luego hallamos el factor integrante:

$$factor = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

Multiplicamos el factor integrante:

$$\left(\frac{dy}{dx} + 2y\right)e^{2x} = e^{2x}(x^2 + x)$$

Al multiplicar al lado izquierdo este se convierte en el diferencial de un producto.

$$d(ye^{2x}) = e^{2x}(x^2 + x)$$

Integramos ambos miembros.

$$\int d(ye^{2x}) = \int [e^{2x}(x^2 + x)]dx$$

Integrando por tabulación el lado derecho.

$$ye^{2x} = e^{2x} \left[\frac{x^2 + x}{2} - \frac{2x + 1}{4} + \frac{1}{4} \right] + C$$
$$y = \frac{2x^2}{4} + Ce^{-2x}$$

Manguito 2.-

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} x \cdot y = xe^{\cos x}$$

Solución.

Por inspección la ecuación diferencial es lineal, ubicaremos los datos del ejercicio:

$$P(x) = \operatorname{sen} x \text{ y } Q(x) = xe^{\cos x}$$

Luego hallamos el factor integrante:

$$factor = e^{\int \operatorname{sen} x dx} = e^{-\cos x}$$

Multiplicamos el factor integrante:

$$\left(\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} x \cdot y\right)e^{-\cos x} = e^{-\cos x}(xe^{\cos x})$$

Al multiplicar al lado izquierdo este se convierte en el diferencial de un producto.

$$d(ye^{-\cos x}) = x$$

Integramos ambos miembros.

$$\int d(ye^{-\cos x}) = \int x dx$$

Integrando ambos miembros

$$ye^{-\cos x} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^2}{2} e^{\cos x} + C e^{\cos x}$$

Manguito 3.-

Resolver la ecuación:

$$x \frac{dy}{dx} = y + x^3 - x^2 + 3x$$

Solución.

Llevamos a la forma lineal dividiendo la ecuación por “x”.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 - x + 3$$

$$P(x) = -\frac{1}{x} \text{ y } Q(x) = x^2 - x + 3$$

Luego hallamos el factor integrante:

$$factor = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$$

Multiplicamos el factor integrante:

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\right)x^{-1} = x^{-1}(x^2 - x + 3)$$

Al multiplicar al lado izquierdo este se convierte en el diferencial de un producto.

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = x - 1 + \frac{3}{x}$$

Integramos ambos miembros.

$$\int d\left(\frac{y}{x}\right) = \int \left(x - 1 + \frac{3}{x}\right) dx$$

Integrando ambos miembros

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln x + C$$
$$y = \frac{x^3}{2} - x^2 + 3x \ln x + xC$$

Manguito 4.-

Resolver la ecuación:

$$y^2 \frac{dx}{dy} + yx = y \operatorname{sen} y$$

Solución.

Transformando la ecuación:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$
$$P(y) = \frac{1}{y} \quad y \quad Q(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

Luego hallamos el factor integrante:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

Multiplicamos el factor integrante:

$$\left(\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x \right) y = y \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} \right)$$
$$d(xy) = \operatorname{sen} y$$
$$\int d(xy) = \int \operatorname{sen} y dy$$
$$xy = -\cos y + C$$

Manguito 5.-

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$$

Solución.

En esta pregunta se cambiará el procedimiento.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y \ln y + y - x}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 2 \ln y + 1$$

$$P(y) = \frac{1}{y} \quad y \quad Q(y) = 2 \ln y + 1$$

Luego hallamos el factor integrante:

$$factor = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

Multiplicamos el factor integrante:

$$\left(\frac{dx}{dy} + x \right) y = y(2 \ln y + 1)$$

$$d(xy) = 2y \ln y + y$$

$$\int d(xy) = 2 \int \underbrace{y \ln y}_{\text{Integrando por partes}} dy + \int y dy$$

$$xy = y^2 \ln y + C$$

$$x = y \ln y + \frac{C}{y}$$

Manguito 6.

Resolver la ecuación $2xdy = (x^4 + y)dx$ y dar la solución particular en (1,0)

Solución. - haciendo aspa en la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} \cdot y = \frac{x^3}{2}$$

$$P(x) = -\frac{1}{2x} \quad y \quad Q(x) = \frac{x^3}{2}$$

$$factor = e^{\int -\frac{1}{2x} dx} = e^{-\frac{1}{2} \ln x} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Multiplicamos el factor integrante:

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} \cdot y\right) x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^3}{2}\right)$$

$$d\left(\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2}$$

$$\int d\left(\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \int \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} dx$$

$$\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C \Rightarrow y = \frac{x^4}{7} + Cx^{\frac{1}{2}}$$

Si $y = 0$ cuando $x = 1$ reemplazamos en la ecuación.

$$0 = \frac{1^4}{7} + C \cdot 1^{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = -\frac{1}{7}$$

Por ende, la solución particular será:

$$y = \frac{x^4}{7} - \frac{1}{7}x^{\frac{1}{2}}$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

$$x^3 \frac{dy}{dx} + (2 - 3x^2)y = x^3$$

$$\text{Rpta. } 2y = x^3 + Cx^3e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 8x$$

$$\text{Rpta. } y = 4 + Ce^{-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = x^2 - 1$$

$$\text{Rpta. } y = \left(\frac{x^2}{2} - x + C\right)(x+1)$$

$$y^2 \frac{dx}{dy} + 2yx = e^y$$

$$\text{Rpta. } x = \frac{e^y + C}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{8y^3 - x} = 0$$

Rpta. $xy = 2y^4 + C$

$$(2y^3 - 2xy) \frac{dy}{dx} = 1$$

Rpta. $x = y^2 - 1 + Ce^{-y^2}$

La ecuación de Bernoulli

Es un caso especial de las ecuaciones lineales, es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x)$$

Transformando:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n} P(x) = Q(x)$$

Este tipo de ecuaciones serán resueltas haciendo el cambio de variable:

$$y^{1-n} = v \Rightarrow (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

Con lo cual la ecuación diferencial será de la forma:

$$\frac{dv}{dx} + v[(1-n)P(x)] = (1-n)Q(x)$$

Y listo fue convertida a una ecuación lineal.

Duraznito 1.- Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = 2xy^3$$

Solución.

Pasando a dividir la variable “y”.

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - y^{-2} = 2x$$

Realizando el cambio de variable:

$$y^{-2} = v \Rightarrow -2y^{-3} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \therefore y^{-3} \frac{dy}{dx} = \frac{-1dv}{3dx}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{dx} - v = 2x \Rightarrow \frac{dv}{dx} + 3v = -6x$$

Resolviendo la ecuación lineal

$$\begin{aligned} \text{factor} &= e^{\int 3dx} = e^{3x} \\ d(ve^{3x}) &= -e^{3x} \cdot 6x \end{aligned}$$

$$\int d(v e^{3x}) = \underbrace{\int -e^{3x} \cdot 6x dx}_{\text{integral por partes}}$$

$$v e^{3x} = -2x e^{3x} + \frac{2}{3} e^{3x} + C$$

$$v = -2x + \frac{2}{3} + C e^{-3x} \text{ reemplazamos "v = y}^{-2}\text{"}$$

$$y^{-2} = -2x + \frac{2}{3} + C e^{-3x}$$

Duraznito 2.- Resolver la ecuación diferencial

$$y \frac{dy}{dx} + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x$$

Solución. En esta pregunta ya está de la forma buscada solo se hará el cambio de variable:

$$y^2 = v \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \therefore y \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{2dx}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\frac{dv}{2dx} + v \operatorname{tg} x = \cos^2 x \Rightarrow \frac{dv}{dx} + 2v \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x$$

Resolviendo la ecuación lineal

$$\text{factor} = e^{\int 2 \operatorname{tg} x dx} = e^{-2 \ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$d\left(v \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 2 \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int d\left(\frac{v}{\cos^2 x}\right) = \int 2 dx$$

$$\frac{v}{\cos^2 x} = 2x + C$$

$$v = 2x \cos^2 x + C \cdot \cos^2 x \text{ reemplazamos "v = y}^2\text{"}$$

$$y^2 = 2x \cos^2 x + C \cdot \cos^2 x$$

Duraznito 3.- Resolver la ecuación diferencial

$$x dy + y dx = x^3 y^6 dx$$

Solución. Cambiamos la forma a la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x^3 y^6 - y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2 y^6 \\ y^{-6} \frac{dy}{dx} + \frac{y^{-5}}{x} &= x^2 \\ y^{-5} = v \Rightarrow -5y^{-6} \frac{dy}{dx} &= \frac{dv}{dx} \therefore y^{-6} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5} \frac{dv}{dx} \\ -\frac{1}{5} \frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} &= x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} - 5 \frac{v}{x} = -5x^2 \\ factor &= e^{\int \frac{-5}{x} dx} = e^{-5 \ln x} = x^{-5}\end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\begin{aligned}v &= (x^{-5})^{-1} \int x^{-5} \cdot (-5x^2) dx \\ v &= x^5 \int -5x^{-3} dx \Rightarrow v = x^5 \cdot \left(\frac{-5x^{-2}}{-2} + C \right) \\ v &= Cx^5 + \frac{5x^3}{2} \text{ reemplazamos "v = y}^{-5}\text{"} \\ y^{-5} &= Cx^5 + \frac{5x^3}{2}\end{aligned}$$

Duraznito 4.- Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

Solución. Nota que de esa forma el ejercicio no tiene futuro por lo que invertiremos la ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{x^2 - y^2 - a^2}{2xy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y} x = -\frac{y^2 + a^2}{2xy} \\ x \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y} x^2 &= -\frac{y^2 + a^2}{2y} \\ x^2 = v \Rightarrow 2x \frac{dx}{dy} &= \frac{dv}{dy} \therefore x \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dv}{dy}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dv}{dy} - \frac{1}{2y} v = -\frac{y^2 + a^2}{2y} \Rightarrow \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = -\frac{y^2 + a^2}{y}$$

$$\text{factor} = e^{\int \frac{-1}{y} dy} = e^{-\ln y} = y^{-1}$$

Reemplazando en la fórmula:

$$v = (y^{-1})^{-1} \int y^{-1} \cdot \left(-\frac{y^2 + a^2}{y} \right) dy$$

$$v = y \int -\left(1 + \frac{a^2}{y^2} \right) dy \Rightarrow v = y \cdot \left(-y + \frac{a^2}{y} + C \right)$$

$$v = -y^2 + a^2 + Cy \text{ reemplazamos "v = x^2"}$$

$$x^2 = -y^2 + a^2 + Cy$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

$$1. -3y \frac{dx}{dy} - 2x = \frac{y^3}{x^2}$$

$$\text{Rpta. } x^3 = y^3 + cy^2$$

$$2. - (x^2 + 1)y' = xy + x^2y^2$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{y^2} = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

$$3. -xdy + ydx = x^3y^6dx$$

$$\text{Rpta. } (5 + Cx^2)x^{3y^5} = 2$$

$$4. -3y' + xy = xy^{-2}$$

$$\text{Rpta. } y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$$

$$5. -xyy' - 2y^2 = 1; y(1) = 1$$

$$\text{Rpta. } y^2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^4$$

Ecuación de Riccati

Es una ecuación no lineal que es de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

Dependiendo de los valores de $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ la solución de esta ecuación no podrá ser expresada en términos de funciones elementales.

La solución para esta ecuación es indispensable conocer una solución particular y_1 luego haremos el cambio de variable: $y = y_1 + u \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$$

Reemplazamos en la ecuación.

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)[y_1 + u] + R(x)[y_1 + u]^2$$

$$y_1' + \frac{du}{dx} = P + Qy_1 + Qu + R[y_1^2 + 2y_1u + u^2]$$

$$y_1' + \frac{du}{dx} = \underbrace{P + Qy_1 + Ry_1^2}_{y_1'} + Qu + 2Ry_1u + Ru^2$$

Cancelando los y_1' el resultado será la ecuación de Bernoulli.

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2Ry_1)u = Ru^2$$

Cuya solución ya estudiamos, para resolver esta ecuación también podemos hacer el cambio:

$$z = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}$$

Con lo cual la ecuación será de la forma:

$$\frac{dz}{dx} + (Q + 2Ry_1)z = -R$$

Con lo cual se volvió una ecuación lineal y solo se aplicará fórmula.

Fresita 1.

Resolver la ecuación diferencial.

$$y' + 2xy = 1 + x^2 + 2y^2$$

Si una solución particular es: $y_1 = x$

Solución.

Si nos fijamos la ecuación diferencial es de la forma RICATTI.

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2) - 2xy + y^2$$

De la forma: $P(x) = 1 + x^2$; $Q(x) = -2x$ y $R(x) = 1$

Realizando el cambio de variable

$$y = \underbrace{x}_{\text{Dato del ejercicio}} + \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}$$

Reemplazamos en la ecuación

$$1 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = (1 + x^2) - 2x \left(x + \frac{1}{u} \right) + \left(x + \frac{1}{u} \right)^2$$

$$1 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = 1 + x^2 - 2x^2 - \frac{2x}{u} + x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2}$$

$\frac{du}{dx} = -1$ cuya ecuación es variables separables

$$\int du = - \int dx \Rightarrow u = -x + c$$

Recuerda que

$$\frac{1}{u} = y - x \Rightarrow u = \frac{1}{y - x}$$

Reemplazamos

$$\frac{1}{y - x} = c - x$$

$$1 = (c - x)(y - x)$$

Fresita 2.

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} - \frac{2}{x}$$

Si una solución particular es: $y_1 = 1$

Solución.

Si nos fijamos la ecuación diferencial es de la forma RICATTI.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}$$

De la forma: $P(x) = -\frac{2}{x}$; $Q(x) = \frac{1}{x}$ y $R(x) = \frac{1}{x}$

Realizando el cambio de variable

$$y = \underbrace{\frac{1}{u}}_{\text{Dato del ejercicio}} + \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}$$

Reemplazamos en la ecuación

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{xu} + \frac{1}{x} + \frac{2}{xu} + \frac{1}{xu^2}$$

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = \frac{3}{xu} + \frac{1}{xu^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{3}{x}u - \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{3}{x}u = -\frac{1}{x}$$

$$\int du = \int dx \Rightarrow u = x + c$$

Recuerda que

$$\frac{1}{u} = y - x \Rightarrow u = \frac{1}{y - x}$$

Reemplazamos

$$\frac{1}{y - x} = x + c$$

$$1 = (x + c)(y - x)$$

Estudio de la ecuación de Riccati

Solución de la ecuación de Riccati con una solución:

$$\frac{dy}{dx} + (-x)y^2 + (2x - 1)y + (1 - x) = 0$$

Cuya solución particular es: $y_1 = 1$

Solución: $y = y_1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$; derivar $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$

Reemplazamos:

$$-\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} + (-x) \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 + (2x - 1) \left(1 + \frac{1}{z}\right) + (1 - x) = 0$$

Desarrollamos

$$-\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} - x - \frac{2x}{z} - \frac{x}{z^2} + 2x + \frac{2x}{z} - 1 - \frac{1}{z} + 1 - x = 0$$

$$-\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} - \frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + z = -x \text{ resolvemos la ecuación lineal}$$

$$ze^{\int 1 dx} = \int -x \cdot e^{\int 1 dx} dx + C$$

$$ze^x = -(xe^x - e^x) + C$$

$$z = -x + 1 + Ce^{-x}$$

$$\frac{1}{y - 1} = -x + 1 + Ce^{-x}$$

$$y = 1 + \frac{1}{1 - x + Ce^{-x}}$$

Solución de la ecuación de Riccati con dos soluciones:

$$\frac{dy}{dx} + (2x)y^2 + (-8x^2)y + (8x^3 - 2x - 2) = 0$$

Donde: $y_1 = 2x + 1$; $y_2 = 2x - 1$

Solución:

$$y = \frac{y_1 - y_2 C e^{\int (y_2 - y_1) A(x) dx}}{1 - C e^{\int (y_2 - y_1) A(x) dx}}$$

Reemplazamos las soluciones brindadas:

$$y = \frac{(2x+1) - (2x-1)Ce^{\int((2x-1)-(2x+1))(2x)dx}}{1 - Ce^{\int((2x-1)-(2x+1))(2x)dx}}$$

$$y = \frac{(2x+1) - (2x-1)Ce^{\int -4x dx}}{1 - Ce^{\int -4x dx}}$$

$$y = \frac{(2x+1) - (2x-1)Ce^{-2x^2}}{1 - Ce^{-2x^2}}$$

Solución de la ecuación de Riccati sin soluciones mostradas:

$$x^3 \frac{dy}{dx} - y^2 - x^2 y + x^2 = 0$$

Solución. Damos forma a la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\left(\frac{-1}{x^3}\right)}_A y^2 + \underbrace{\left(\frac{-1}{x}\right)}_B y + \underbrace{\frac{1}{x}}_C = 0; \quad y = \frac{u}{f}$$

es una solución

$$f = e^{\int B dx} = e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Desarrollamos a la ecuación

$$\text{Por lo cual } u = \frac{y}{x}$$

Separación de variables

$$u' + \frac{A}{f} u^2 + Cf = 0 \text{ reemplazamos en la ecuación}$$

Integramos

$$u' + \frac{-1/x^3}{1/x} u^2 + \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Despejamos el logaritmo

$$u' - \frac{1}{x^2} u^2 + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{Propiedad: } e^{\ln A} = A$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} (u^2 - 1)$$

Reemplazamos el valor de

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x^2}$$

Desarrollamos el lado derecho.

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) = \frac{1}{x} + C$$

$$\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) = \frac{2}{x} + C$$

Ya puedes considerarlo como respuesta, pero se puede mejorar.

$$\frac{u-1}{u+1} = e^{\frac{2}{x}+C}$$

$$\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1} = e^{\frac{2}{x}+C}$$

$$\frac{y-x}{y+x} = e^{\frac{2}{x}+C}$$

$$y = \frac{x + xCe^{\frac{-2}{x}}}{1 - Ce^{\frac{-2}{x}}}$$

¿Alguien dijo prueba tus habilidades?

$$1. -3y \frac{dx}{dy} - 2x = \frac{y^3}{x^2}$$

$$\text{Rpta. } x^3 = y^3 + cy^2$$

$$2. -(x^2 + 1)y' = xy + x^2y^2$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{y^2} = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

$$3. -xdy + ydx = x^3y^6dx$$

$$\text{Rpta. } (5 + Cx^2)x^{3y^5} = 2$$

$$4. -3y' + xy = xy^{-2}$$

$$\text{Rpta. } y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$$

$$5. -xyy' - 2y^2 = 1; y(1) = 1$$

$$\text{Rpta. } y^2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^4$$

Aplicación de Ecuaciones Diferenciales

Dinámica de Poblaciones:

1.- En un experimento de laboratorio, se observa que una colonia de levadura duplica su tamaño cada hora. Si inicialmente se inocula un tubo de ensayo con una pequeña cantidad de levadura, ¿cuántas veces mayor será la colonia después de 3 horas, asumiendo condiciones óptimas de crecimiento?

Solución

Sea “ x ”, la cantidad del fermento en cualquier instante, esto corresponde a la cantidad presente, así mismo sea F_0 , la cantidad inicial del fermento en $t = 0$ hr. Si denominamos a k , constante de proporcionalidad, la E.D. es.

$$\frac{dx}{dt} = kx; \text{ para la condición inicial } x(0) = F_0$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= k dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int k dt \\ \ln x &= kt + C \\ \ln x &= kt + \ln c \\ \ln x &= kt + \ln c \\ x &= e^{kt + \ln c} \\ x &= c e^{kt}\end{aligned}$$

Para $x(0) = F_0$ resulta $c = F_0$ por lo tanto $x = F_0 e^{kt}$

En el enunciado para $t = 1$ hr, $x = 2F_0$ resulta

$$e^k = 2$$

Reemplazando en la ecuación:

$$x = 2^t F_0$$

En esta expresión representa la cantidad de fermento en cualquier tiempo “ t ”, calculamos para $t = 3$ hr.

$$x = 2^3 F_o \Rightarrow x = 8F_o$$

Lo que indica para la cantidad de fermento para 3 horas es 8 veces la cantidad inicial.

2.- Un biorreactor se inocula con E_o células de *Saccharomyces cerevisiae*. Si la población de levaduras se triplica cada 90 minutos, ¿cuál será la biomasa total al cabo de 240 minutos?

Solución:

Sea “ x ”, la cantidad de células *Saccharomyces cerevisiae* en cualquier instante, esto corresponde a la cantidad presente, así mismo sea E_o , la cantidad inicial de bacterias en $t = 0$ hr. Si denominamos a k , constante de proporcionalidad, la E.D. es.

$$\frac{dx}{dt} = kx; \text{ para la condición inicial } x(0) = E_o$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= k dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int k dt \\ \ln x &= kt + C \\ \ln x &= kt + \ln c \\ \ln x &= kt + \ln c \\ x &= e^{kt + \ln c} \\ x &= c e^{kt}\end{aligned}$$

Para $x(0) = E_o$ resulta $c = E_o$ por lo tanto $x = E_o e^{kt}$

En el enunciado para $t = 1.5 \text{ hr}$, $x = 3E_o$ resulta $e^{1.5k} = 3 \Rightarrow k = 0.73$

Luego $e^{0.73} = 2.08$

Reemplazando en la ecuación:

$$x = 2.08^t E_o$$

En esta expresión representa la cantidad de fermento en cualquier tiempo “ t ”, calculamos para $t = 4 \text{ hr}$.

$$x = 2.08^4 E_o \Rightarrow x = 18,71 E_o$$

Lo que indica para la cantidad de bacterias para 3 horas es 18,71 veces la cantidad inicial.

3.- La tasa de crecimiento del fermento activo en un cultivo de levadura es directamente proporcional a la cantidad de fermento presente en ese momento. Si se duplica la cantidad inicial en 2 horas, ¿Cuántas veces puede esperarse que se tenga la cantidad original al cabo de 9/11 hora?

Solución

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

$$\frac{dQ}{Q} = k dt$$

$$\int_{Q_o}^{2Q_o} \frac{dQ}{Q} = k \int_0^2 dt$$

$$[\ln Q]_{Q_o}^{2Q_o} = k[t]_0^2$$

$$\ln 2Q_o - \ln Q_o = k(2)$$

$$\ln \left[\frac{2Q_o}{Q_o} \right] = 2k \Rightarrow k = \ln \sqrt{2}$$

$$\int_{Q_o}^x \frac{dQ}{Q} = [\ln \sqrt{2}] \int_0^{\frac{9}{11}} dt$$

$$[\ln Q]_{Q_o}^x = [\ln \sqrt{2}] [t]_0^{\frac{9}{11}}$$

$$\ln x - \ln Q_o = (\ln \sqrt{2}) \left(\frac{9}{11} \right)$$

$$\ln \left[\frac{x}{Q_o} \right] = \ln(\sqrt{2})^{\frac{9}{11}}$$

$$\frac{x}{Q_o} = 2^{\frac{9}{22}}$$

$$x = 1,328Q_0$$

4.- La evolución de un brote de influenza en una población de 100 000 personas está descrita por la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = py(100000 - y)$$

Tenga en cuenta que “y” es el número de personas que tienen gripe en el instante “t” (medido en semanas) además $p = 0,00001$. Si en un principio 10 personas estaban enfermas, determina la función “y” con respecto a la variable independiente “t”. ¿Que tiempo pasara antes de que la mitad de la población este infectada?

Solución:

$$\frac{dy}{dt} = py(100000 - y)$$

Del dato:

$$\frac{dy}{dt} = 0,00001y(100000 - y)$$

$$\frac{dy}{y(100000 - y)} = 0,00001dt$$

$$\int \frac{dy}{y(100000 - y)} = 0,00001 \int dt$$

$$\int \left[\frac{1}{100000y} - \frac{1}{100000(100000 - y)} \right] dx = 0,00001t + \ln c$$

$$\frac{1}{100000} \int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{(100000 - y)} \right] dx = 0,00001t + \ln c$$

$$\ln y - \ln(100000 - y) = t + \ln c$$

$$\ln \left[\frac{y}{100000 - y} \right] = t + \ln c \Rightarrow \frac{y}{100000 - y} = ce^t$$

$$y = 100000ce^t - yce^t$$

$$y + yce^t = 100000ce^t$$

$$y(1 + ce^t) = 100000ce^t$$

$$y = \frac{100000c e^t}{1 + c e^t}$$

Recuerda por datos del ejercicio para $y = 10 \Rightarrow t = 0$ *semanas*

$$10 = \frac{100000c}{1 + c}$$

$$10 + 10c = 100000c$$

$$10 = 99990c$$

$$\frac{1}{9999} = c$$

Por lo cual la nueva ecuación será:

$$y = \frac{100000 e^t}{9999 + e^t}$$

Para la mitad de la población “ $y = 50000$ ” reemplazamos:

$$50000 = \frac{100000 e^t}{9999 + e^t}$$

$$9999 + e^t = 2e^t$$

$$e^t = 9999$$

$$t = \ln(9999)$$

$$t = 9.21 \text{ semanas}$$

Termodinámica.

Enfriamiento de los cuerpos

Imagina una taza de café recién hecho que se deja enfriar en una habitación a 20°C . Sabemos que el café se enfriará más rápido al principio y luego más lento. Si el café tarda 20 minutos en bajar de 100°C a 60°C , ¿cuánto tiempo más tardará en llegar a los 30°C ?

Solución.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$$

$$\frac{dT}{T - 20} = k dt$$

$$\begin{aligned}
\int_{100}^{60} \frac{dT}{T-20} &= k \int_0^{20} dt \\
[\ln(T-20)]_{100}^{60} &= k[t]_0^{20} \\
\ln 40 - \ln 80 &= k(20) \\
\ln \left[\frac{40}{80} \right] &= 20k \Rightarrow k = \frac{1}{20} \ln \left[\frac{1}{2} \right] \\
k &= \frac{-\ln 2}{20} \\
\int_{100}^{30} \frac{dT}{T-20} &= \left[\frac{-\ln 2}{20} \right] \int_0^{t_1} dt \\
[\ln(T-20)]_{100}^{30} &= \left[\frac{-\ln 2}{20} \right] [t]_0^{t_1} \\
\ln 10 - \ln 80 &= \left[\frac{-\ln 2}{20} \right] t_1 \\
\ln \left[\frac{10}{80} \right] &= \left[\frac{-\ln 2}{20} \right] t_1 \Rightarrow \ln \left[\frac{1}{8} \right] = \left[\frac{-\ln 2}{20} \right] t_1 \\
\ln[8] &= \left[\frac{\ln 2}{20} \right] t_1 \\
t_1 &= \frac{20 \ln[8]}{\ln 2} \\
t_1 &= \frac{20 \times 3 \ln[2]}{\ln 2} = 60
\end{aligned}$$

2.- Un cuerpo a una temperatura de 0°F se coloca en un cuarto cuya temperatura se mantiene a 100°F. Si después de 10 minutos la temperatura del cuerpo es de 25°F. Hallar:

a) El tiempo requerido para que el cuerpo tenga una temperatura de 50°F.

b) La temperatura del cuerpo después de 20 minutos.

Solución.

Desarrollamos un cuadro donde escribimos las respectivas condiciones:

Temperatura del cuerpo (°F)	0°F	25°F	50°F	y
Tiempo (minutos)	0	10	x	20

Usando la ley del enfriamiento

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= k(T - 100) \\ \frac{dT}{T - 100} &= k dt \\ \int \frac{dT}{T - 100} &= \int k dt \\ \ln(T - 100) &= kt + \ln C \\ T - 100 &= C e^{kt}\end{aligned}$$

$T = 100 + C e^{kt}$ Es la ecuación que describe la temperatura, hallaremos las constantes con las condiciones dadas: $t = 0; T = 0$

$$\begin{aligned}0 &= 100 + C e^{k(0)} \\ C &= -100\end{aligned}$$

Con lo cual: $T = 100 - 100e^{kt}$

Si: $t = 10; T = 25$

$$25 = 100 - 100e^{k(10)}$$

$$100e^{k(10)} = 75$$

$$e^{k(10)} = \frac{3}{4}$$

$$10k = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$k = -0.0287682$$

Con lo cual nuestra ecuación será:

$$T = 100 - 100e^{-0.0287682t}$$

a) calcula el tiempo para $T = 50^\circ\text{F}$

$$\begin{aligned}50 &= 100 - 100e^{-0.0287682t} \\ 100e^{-0.0287682t} &= 50\end{aligned}$$

$$e^{-0.0287682t} = \frac{1}{2}$$

$$-0.0287682t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = \frac{\ln(0.5)}{-0.0287682} = 24.09 \text{ minutos}$$

b) calcula la temperatura para $t = 20 \text{ min}$

$$T = 100 - 100e^{-0.0287682(20)}$$

$$T = 43.75^\circ\text{F}$$

3.- Dada una gota esférica de alcohol cuya tasa de evaporación es directamente proporcional a su área superficial, y sabiendo que su radio se reduce a un cuarto en 5 segundos, determinar la disminución relativa del radio en el siguiente segundo.

Solución

Sean los siguientes datos para la esfera: V el volumen; S la superficie; r el radio en cualquier instante y R el radio cuando $t = 0$. La rapidez de variación del volumen respecto a la superficie está dada por la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dV}{dt} = -ks ; \text{ donde "k" es constante de proporcionalidad}$$

Recuerde que: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$; además que: $S = 4\pi r^2$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -k4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -k$$

$$\int dr = \int -k dt$$

$$r = -kt + c$$

Donde: $r(0) = R \Rightarrow R = -k(0) + c; c = R$

$$\text{Para } r(5) = \frac{R}{4}$$

$$\frac{R}{4} = -k5 + R \Rightarrow k = \frac{3R}{20}$$

Por lo cual la ecuación del radio en función del tiempo será:

$$r = -\frac{3R}{20}t + R \Rightarrow r = \frac{R}{20}(20 - 3t)$$

Para $t = 6$

$$r = \frac{R}{10}$$

4.- Se ha descubierto que una bola de naftalina que tenía originalmente un radio de $\frac{1}{4}$ pulgada, tiene un radio de $\frac{1}{8}$ pulgada al cabo de 1 mes. Suponiendo que se evapora a un índice proporcional a su superficie, encontrar el radio en función del tiempo. ¿Después de cuantos meses más desaparecerá por completa?

Dada una esfera de naftalina con radio inicial de $1/4$ pulgada, que se reduce a $1/8$ pulgada en un mes debido a la evaporación, determinar la función que describe el radio en función del tiempo, suponiendo una tasa de evaporación proporcional al área superficial. Además, calcular el tiempo total de evaporación.

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = kA$$

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = k4\pi r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = k$$

$$dr = kdt$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{8}} dr = k \int_0^1 dt$$

$$[r]_1^{\frac{1}{8}} = k[t]_0^1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = k(1)$$

$$-\frac{1}{8} = k$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^r dr = -\frac{1}{8} \int_0^t dt$$

$$[r]_{\frac{1}{4}}^r = -\frac{1}{8} [t]_0^t$$

$$r - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}t$$

$$r = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}t \Rightarrow r = \frac{1}{8}(2 - t) \text{ esta es la funcion}$$

Para que la naftalina desaparezca el $r = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ meses}$

Fluidos

Un contenedor de forma cilíndrica recta de 304,8 cm de radio y 609.6 cm de altura contiene aceite de pescado para su transporte, sin embargo por la mala manipulación del personal tiene un pequeño orificio en la base de 2,54 cm de diámetro. ¿En cuánto tiempo se vaciará toda el aceite?

Solución

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$-A_1 \frac{dy}{dt} = A_2 \sqrt{2gy}$$

El signo menos indica que “y” disminuye cuando “t” aumenta.

$$-A_1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = A_2 \sqrt{2g} dt$$

Es una ecuación de variables separables

$$-A_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = A_2 \sqrt{2g} \int dt$$

$$-2A_1 y^{\frac{1}{2}} = A_2 \sqrt{2g} t + c$$

Aplicando las condiciones iniciales: para $t = 0$ indica $y = H$

$$-2A_1 H^{\frac{1}{2}} = A_2 \sqrt{2g}(0) + c \quad -2A_1 H^{\frac{1}{2}} = c$$

$$R = 304.8 \text{ cm} = 3.048 \text{ m}$$

$$A_1 = \pi R^2 = (3.14)(3.048)^2$$

$$A_1 = 29.19 \text{ m}^2$$

$$H = 609.60 \text{ cm} = 6.096 \text{ m}$$

$$H^{\frac{1}{2}} = 2.47$$

$$c = -2(29.19)(2.47) = -144.20$$

$$\text{Luego: } -2A_1 y^{\frac{1}{2}} = A_2 \sqrt{2g} t - 144.20$$

Variado total sucede cuando $y = 0$

$$A_2 = (3.14) \left(\frac{0.0254}{2} \right)^2 = 0.00051 \text{ m}^2$$

$$0 = A_2 \sqrt{2g} t - 144.20$$

$$t = \frac{144.20}{A_2 \sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{144.20}{(0.00051) \sqrt{2 \times 9.8}}$$

$$t = 65142.91 \text{ s}$$

$$t = 18 \text{ hrs}$$

Datación por carbono

Un fósil contiene una cantidad de carbono-14 que es una centésima parte de la cantidad original. Utilizando la vida media del carbono-14, determinar la antigüedad del fósil.

Solución.

Realizamos la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = kA; \text{ para la condición inicial } x(0) = E_o$$

Resolviendo la ecuación diferencial $\frac{A}{2} = A(5600)$

$$\frac{dA}{A} = kdt$$

$$\int \frac{dA}{A} = \int kdt$$

$$\ln A = kt + C$$

$$\ln A = kt + \ln c$$

$$\ln A = kt + \ln c$$

$$A = e^{kt + \ln c}$$

$$A = ce^{kt}$$

Donde: $A(0) = A_o \Rightarrow A_o = ce^{k(0)}$; $c = A_o$

Además el periodo de vida media $\frac{A_o}{2} = A(5600)$

Reemplazando

$$\frac{A_o}{2} = A_o e^{k5600}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 5600k$$

$$k = -0.00012378$$

La ecuación será:

$$A = A_o e^{-0.00012378t}$$

Desintegración

2.- Un reactor nuclear transforma plutonio-239 en uranio-238. Si después de 15 años queda un 0.0043% del plutonio inicial, calcular la vida media del plutonio-239, considerando una desintegración radiactiva de primer orden.

Solución.

Llamemos x a la cantidad de plutonio 239 que queda en el instante t , con lo que $x'(t)$ indicará la velocidad o rapidez de desintegración del

mismo. Como la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de isótopo restante, la ley diferencial que rige el proceso de desintegración es

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \text{ recordando } x(0) = A_0$$

Cuya solución de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = A_0 e^{-kt}$$

Determinamos el valor de la constante de desintegración k , con las relaciones preestablecidas.

$$x(15) = \left(1 - \frac{0.0043}{100}\right) A_0 = \frac{99.9957}{100} A_0$$

Igualemos con la solución de la ecuación diferencial:

$$A_0 e^{-15k} = \frac{99.9957}{100} A_0$$

$$-15k = \ln\left(\frac{99.9957}{100}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{15} (-0.000043)$$

$k = -0.000002866$ la ecuación será:

$$x(t) = A_0 e^{-0.000002866t}$$

Para la vida media: $x(t_0) = \frac{A_0}{2}$

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-0.000002866t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.000002866t$$

$$t = 241851.77 \text{ años}$$

4.-Tenemos una sustancia que brilla en la oscuridad y pierde su brillo con el tiempo. Si sabemos que la mitad de su brillo se pierde cada 38 horas, ¿cuánto tiempo tarda en perder el 90% de su brillo?

Solución. Usamos decaimiento

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

Hallamos el valor de “ k ”, partiendo del dato de vida media y 38 horas

$$\begin{aligned}\int_{x_o}^{x_o/2} \frac{dx}{x} &= -k \int_0^{38} dt \\ [\ln x]_{x_o}^{x_o/2} &= -k[t]_0^{38} \\ \ln \frac{x_o}{2} - \ln x_o &= -k(38) \\ \ln \left[\frac{x_o}{2} \right] &= -38k \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{38}\end{aligned}$$

Obtenido el valor de “ k ” volvemos a redefinir los valores de integración para la pregunta dada.

$$\begin{aligned}\int_{x_o}^{x_o/10} \frac{dx}{x} &= \left[\frac{\ln 2}{38} \right] \int_0^{t_1} dt \\ [\ln x]_{x_o}^{x_o/10} &= \left[\frac{\ln 2}{38} \right] [t]_0^{t_1} \\ \ln \frac{x_o}{10} - \ln x_o &= \left[\frac{\ln 2}{38} \right] t_1 \\ \ln \left[\frac{x_o}{10} \right] &= \left[\frac{\ln 2}{38} \right] t_1 \Rightarrow \ln[10] = \left[\frac{\ln 2}{38} \right] t_1 \\ t_1 &= \frac{38 \ln[10]}{\ln 2} \\ t_1 &= \frac{38 \times 2,3026}{0,6931} = 126.2\end{aligned}$$

Circuitos Resistencia – Inductor “R-L”

Un circuito RL en serie, con una fuerza electromotriz de 20 V, una inductancia de 2 H y una resistencia de 40 Ω , se conecta en $t = 0$. Determinar la expresión de la corriente en función del tiempo, considerando que inicialmente la corriente es nula.

Solución.

La f.e.m. alimentara al circuito por esa razón:

$$V_{f.e.m.} = V_{inductor} + V_{resistencia}$$

$$20 = 2 \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot 40$$

Simplificamos y acomodamos

$$\frac{di}{dt} + 20i = 10; \text{ es lineal}$$

$$i(t) = e^{-\int 20dt} \left(C + \int 10 \cdot e^{\int 20dt} dt \right)$$

$$i(t) = e^{-20t} \left(C + \int 10 \cdot e^{20t} dt \right)$$

$$i(t) = e^{-20t} \left(C + \frac{1}{2} e^{20t} \right), \text{ condicion: } i(0) = 0$$

$$0 = e^{-20(0)} \left(C + \frac{1}{2} e^{20(0)} \right) \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$i(t) = e^{-20t} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{20t} \right) = \frac{1}{2} (1 - e^{-20t})$$

Circuitos Resistencia – Conductor “R-C”

Un circuito RC en serie, con una fuerza electromotriz de 50 V, una capacitancia de 5 mF y una resistencia de 25 Ω , se conecta en $t = 0$. Determinar la expresión de la corriente en función del tiempo, considerando que inicialmente el condensador está descargado.

Solución.

La f.e.m. alimentara al circuito por esa razón:

$$V_{f.e.m.} = V_{condensador} + V_{resistencia}$$

$$50 = \frac{Q}{C} + R \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$50 = 200Q + 25 \frac{dQ}{dt}$$

Simplificamos y acomodamos

$$\frac{dQ}{dt} + 8Q = 2$$

$$Q(t) = e^{-\int 8dt} \left(C + \int 2 \cdot e^{\int 8dt} dt \right)$$

$$Q(t) = e^{-8t} \left(C + \frac{1}{4} e^{8t} \right), \text{condicion: } Q(0) = 0$$

$$0 = e^{-8(0)} \left(C + \frac{1}{4} e^{8(0)} \right) \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$Q(t) = e^{-8t} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{8t} \right) = \frac{1}{4} (1 - e^{-8t})$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = 2e^{-8t}$$

Reacciones Químicas

La velocidad de una reacción química es directamente proporcional a la concentración de uno de sus reactantes. Si inicialmente hay 15 kg de este reactante y después de 8 horas quedan 5 kg, determinar la cantidad restante al cabo de 5 horas y el tiempo necesario para que quede 1 kg.

Solución. Sea “ x ” kg la cantidad de la nueva sustancia generada en t minutos.

$$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow x(t) = C e^{kt}$$

$$\text{Dato: } x(0) = 15 \text{ kg}$$

$$15 = C e^{k(0)} \Rightarrow C = 15 \Rightarrow x(t) = 15 e^{kt}$$

$$\text{Dato: } x(8) = 5 \text{ kg}$$

$$5 = 15 e^{k(8)} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{8k} \Rightarrow \ln \frac{1}{3} = 8k$$

$$k = -0.1373265$$

$$x(t) = 15e^{-0.1373265t}$$

a) Nos pide la cantidad para $t = 5$

$$x(5) = 15e^{-0.1373265(5)} = 7.549Kg$$

b) Nos pide el tiempo cuando $x = 1kg$

$$1 = 15e^{-0.1373265t} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{15}\right) = -0.1373265t$$

$$t = 19.7197Kg$$

Trayectoria Ortogonales

Determine las trayectorias ortogonales a la familia de curvas:

$$x^2 + 9y^2 = 9$$

Identificamos la elipse

$$2xdx + 18ydy = 0$$

Hallamos la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1x}{9y}$$

Damos forma a la ecuación

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{9y}$$

Cambiando pendientes

$$\frac{dy}{9y} = \frac{dx}{x}$$

Aplicamos separación de variables

$$\ln(y) = 9\ln x + C$$

Integramos

$$y = Cx^9$$

Tenemos la ecuación buscada

Determine las trayectorias ortogonales a la familia de curvas:

$$y = c_1x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2c_1x$$

$$-\frac{dx}{dy} = 2c_1x$$

$$-\frac{dx}{x} = 2\left(\frac{y}{x^2}\right)dy$$

$$xdx = 2ydy$$

$$-\frac{x^2}{2} = y^2 + C$$

$$-x^2 = 2y^2 + C$$

$$C = x^2 + 2y^2$$

Bibliografía

- Ayres, F. (1969). *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales*.
- David, G. C., Del Carmen, H. M. M., & Elizabeth, M. G. L. (2021). *Ecuaciones diferenciales para carreras de ingeniería*. Grupo Editorial Patria.
- Gutiérrez, C. V., & Carrión, M. L. (2010). *Ecuaciones diferenciales*.
- Lázaro Manrique, H. E. (2015). *Ecuaciones diferenciales* (1st ed.) [Físico]. Editora Macro EIRL.
- López, M. (2000). *Ecuaciones diferenciales: Teoría Y Problemas* (2a. Ed.).
- López, V. J. (2000). *Ecuaciones diferenciales: Cómo Aprenderlas, Cómo Enseñarlas*. EDITUM.
- Plaat, O. (2021). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Reverte.
- Ramos, E. E. (2008). *Análisis matemático IV: para estudiantes de ciencias e ingeniería*.
- Spiegel, M. R. (1992). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice Hall International.
- Zill, D. G. (2014). *Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones de Modelado*.